

Silke RUWISCH, Lüneburg

Vorstellungen über null und Null

Die detaillierten Fehleranalysen in den 1980er Jahren haben aufgezeigt, dass ein großer Anteil falscher Rechenergebnisse auf Schwierigkeiten im Umgang mit null und Null zurückzuführen ist (Gerster 1982, 1989, Lörcher 1985, Radatz 1980, Wagner 1994). Mehr als 20 Jahre später und gleichzeitig mehr als 25 Jahre nach Hefendehl-Hebekers (1981, 1982) Fallstudie zu den Vorstellungen von Jugendlichen zu null und Null stellt sich zum einen die Frage, ob diese Schwierigkeiten nach wie vor bestehen, zum anderen aber auch, welche Vorstellungen im Umgang mit null und Null dabei jeweils wie ineinander greifen.

1. Die Ambiguität von null und Null

Ontogenetisch wie phylogenetisch treten null und Null als besonders in Erscheinung, sollen aber gleichzeitig als ein Gleiches unter Gleichen aufgefasst werden: Null als eine von zehn Ziffern sowie null als eine von unendlich vielen Zahlen. Diese Ambiguität ergibt sich aus folgendem Umstand: Die Null wurde als ein Zeichen eingeführt, welches die Abwesenheit von Zeichen bezeichnet. Sie erhält damit den Charakter eines Metazeichen, eines Zeichens, welches auf einer höheren Ebene operiert (vgl. Rotman 2000). Dadurch entstehen sowohl Mehrdeutigkeiten als auch „Andersartigkeiten“:

- Trotz der formalen Bedeutung der Ziffer Null in einer Zahldarstellung als nicht besetzte Stelle, variiert die inhaltliche Bedeutung mit der Position der Ziffer Null.
Zwischen anderen Ziffern führt dieses „Nicht-besetzt-Sein“ zur Markierung des freien Platzes; der Unterschied zu anderen Ziffern zeigt sich insbesondere bei den schriftlichen Rechenverfahren, bei denen „nicht besetzt“ gleichgesetzt wird mit „als Platz beachten, jedoch nicht als bedeutungstragende Zahl verrechnen“. Führende Nullen natürlicher Zahlen verändern den Wert der Zahl nicht, können also tatsächlich ignoriert werden, nachfolgende Nullen ver“zehn-hoch-n“fachen die Ausgangszahl.
- Um der Zahl null in der Rahmung der anderen natürlichen Zahlen Bedeutung zu verleihen, können diese Aspekte nur teilweise sinnvoll erweitert werden: Abwesenheit von etwas als Kardinalzahl „0“, Null als Startpunkt des Zählens, ohne „selbst zu zählen“, erscheinen noch plausibel; Null als Größe, als Ordnungszahl oder Operator sind jedoch kaum fassbar.

- Null als Rechenzahl ist ebenfalls ambiguitiv. Die Null erhält allenfalls als Differenz gleicher Zahlen eine in das bisherige Operationsverständnis passende Bedeutung. In allen anderen Fällen müssen Schülerinnen und Schüler nicht nur ihr Verständnis der Rechenoperationen ändern, sondern ebenfalls Differenzierungen vornehmen, welche Rolle die Null jeweils spielt: neutral bei Addition und Subtraktion, absorbierend bei der Multiplikation und fast undurchschaubar bei der Division.

2. Die Fragebogenstudie zur Null

2.1 Verständnisbereiche

1) Null allgemein

Einleitend wurden die Kinder befragt, welche Aspekte der Null sie für erwähnenswert und wissenswert halten.

2) Null als Rechenzahl (Ziffer und Zahl)

Einen zweiten Schwerpunkt bildeten Aufgaben, zu denen Kinder in einer Tabelle links das Ergebnis der Aufgabe angeben, rechts eine Begründung für dieses Ergebnis aufschreiben sollten: $7+0=$, $7-0=$, $7\cdot 0=$, $7:0=$, $0+7=$, $0-7=$, $0\cdot 7=$, $0:7=$, $3\cdot 4\cdot 0=$, $3\cdot 4:0=$, $3+4+0=$, $2400:40$, $240:4=$, $2040:4=$, $2040:40$ “

3) Null als Divisor

Wegen der Besonderheit der Null als Divisor wurden die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Auffassungen anderer Kinder konfrontiert und gebeten, sich dazu zu positionieren.

4) Persönlicher Bezug zur Null – Rechengeschichten zur Null

2.2 Durchführung

155 Viertklässlerinnen und Viertklässler aus sechs Klassen zweier Hamburger Grundschulen wurden schriftlich zu ihren Vorstellungen über die Null befragt. Sie hatten 45 Minuten Zeit, sich individuell mit den Aufgabenstellungen der drei Fragebogenseiten auseinanderzusetzen, wenngleich wir eine Bearbeitung in der konzipierten Reihenfolge unterstellten.

2.3 Ergebnisse

An dieser Stelle sollen lediglich die Ergebnisse zum Operationsverständnis aufgegriffen werden.

Tritt Null als Summand, Faktor oder Subtrahend auf, so geben 96 % der Kinder das richtige Ergebnis an. Vier Kinder übergeneralisieren Null als „ändert nichts“ und geben bei allen Teilaufgaben 7 als Ergebnis an; für zwei weitere Kinder ist jeweils die zuerst aufgeführte Zahl durchgehend die

Ergebniszahl. Die Anzahl richtiger Antworten halbiert sich, wenn drei Summanden oder Faktoren vorgegeben sind, von denen Null als letzter auftritt: Dabei bereitet der Faktor „Null“ mehr als doppelt so häufig Schwierigkeiten als der Summand.

Erwartungsgemäß problematischer verhält es sich, wenn Null als Minuend, Dividend oder Divisor auftritt.

Da die Viertklässlerinnen und Viertklässler aus dem Unterricht noch keine negativen Zahlen kennen, müssen sie eigenständig eine Möglichkeit finden, mit der Aufgabe $0-7$ umzugehen. Erstaunlicherweise geben nur 5 Kinder an, die Aufgabe sei nicht lösbar, weitere 11 bearbeiten diese Teilaufgabe nicht und 6 halten das korrekte Ergebnis -7 fest. Über 80 % der Kinder geben 0 oder 7 als Ergebnis an, beide Ergebnisse kommen ungefähr gleich häufig vor. Die – knappen – Begründungen lassen erkennen, dass das Ergebnis „7“ zumeist auf falsch übertragene Kommutativitätsannahmen gründet: „das ist dasselbe wie bei $7-0$.“ Beim Ergebnis „0“ sind sich viele Kinder hingegen der Merkwürdigkeit sowohl der Aufgabe als auch ihres Ergebnisses bewusst, wissen allerdings nicht, wie sie damit korrekt verfahren sollen: „ $0-7=0$ Man kann von der Null keine abziehen, also Null.“

Tritt Null als Dividend auf, so geben immerhin 77 % der Kinder die korrekte Antwort „0“, während die restlichen entweder „7“ als Ergebnis festhalten oder aber die Aufgabe auslassen bzw. für nicht lösbar halten.

Die Null als Divisor ist – wie erwartet – für die Kinder am schwierigsten zu handhaben. Nur ein Kind hält diese Aufgabe für nicht lösbar, weitere zwölf Kinder lassen die Aufgabe aus, könnten somit ebenfalls der Ansicht sein, sie sei nicht lösbar. 63 % halten „0“ für das richtige Ergebnis, 28 % dagegen „7“. Die Begründungen für die Antworten sind sehr kurz. Besonders auffällig erscheint, dass „etwas nicht rechnen können“ nicht gleichzeitig bedeutet, dass die Aufgabe kein Ergebnis hat. Zieht man in diesem Zusammenhang die Äußerungen der Kinder zum dritten Verständnisbereich heran, so werden die Anzahlen bestätigt: 57 % halten „0“ für das richtige Ergebnis, 26 % die Ausgangszahl, 8 % geben Anna Recht, dass durch Null nicht geteilt werden dürfe. Die schriftlichen Begründungen der Kinder fallen auch bei diesem Aufgabenkomplex eher knapp aus und bestehen in der Wiederholung der Behauptung, der Angabe einer Rechenaufgabe oder einer Bestärkung der Gültigkeit „weil es so ist.“

3. Interpretation und Ausblick

Die Ambiguität von Null und null wird von den Kindern meist selbst erwähnt: „Die Null gehört zu den Zahlen, hat bei Plus, Minus, Geteilt und Mal aber nur die Bedeutung von nichts. Mit der Null kann man Zahlen aber

auch größer machen, wenn man zum Beispiel an die Eins eine Null hinten dran hängen würde, würde aus der Eins eine Zehn werden.“ (Rosanna).

Da weder das Zeichen, noch die Zahl in ihren Aspektbedeutungen, noch das Operieren mit ihr – sei es als Zahl oder als Ziffer – eindeutig ist und damit die Ambiguität in den anderen Teilbereichen überstrahlen könnte, verbleibt bei vielen Kindern eine Unsicherheit, die verstärkt wird durch die noch prinzipielle Unsicherheit jüngerer Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihres Zahl- und Operationsverständnisses. So kann auch bei richtig angegebenem Ergebnis nicht davon ausgegangen werden, dass diesem das entsprechende Verständnis unterliegt: Bspw. übergeneralisieren viele Kinder die absorbierende Wirkung der Null bei der Multiplikation auf die Division und geben sowohl bei $0 : 7$ als auch bei $7 : 0$ als Ergebnis null an. Während sie damit bei ersterem zu den richtigen Antworten zählen, treten sie bei letzterem in der Gruppe der falschen Antworten auf. Die schriftlich festgehaltenen Begründungen der Kinder sind jedoch häufig nicht vorhanden oder so knapp, dass sie bezüglich des dahinter liegenden Verständnisses nicht belastbar sind.

Die Fragebogenstudie kann nachweisen, dass die seit langem bekannten Schwierigkeiten im Umgang mit Null und null bei allen Kindern eine Rolle spielen. Für eine genauere Klärung der jeweils von den Kindern konstruierten Zusammenhänge erscheint eine schriftliche Befragung jedoch als nicht reichhaltig genug. Wenngleich noch Material vorliegt, welches intensiverer – auch semiotischer – Auswertung bedarf, so müssen zur Klärung der einleitenden Fragestellung weitere und reichhaltigere Daten z.B. in Interviews erhoben werden.

Literatur

- Gerster, Hans-Dieter (1982). Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie. Freiburg: Herder.
- Gerster, Hans-Dieter (1989). Die Null als Fehlerquelle bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: Grundschule, 21, 12, 26-29.
- Hefendehl-Hebeker, Lisa (1981). Zur Behandlung der Zahl Null im Unterricht, insbesondere in der Primarstufe. In: *mathematica didactica*, 4, 4, 239-252.
- Hefendehl-Hebeker, Lisa (1982). Die Zahl Null im Bewusstsein von Schülern. Eine Fallstudie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 2, 1, 45-63.
- Lörcher, Gustav Adolf (1985). Einmaleinskenntnisse bei Schülern der Sekundarstufe. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 191-194.
- Radatz, Hendrik (1980). Fehleranalysen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Vieweg.
- Rotman, Brian (2000). Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunktes. Berlin: Kadmos.
- Wagner, Hans-Jürgen (1994). Die Bedeutung der Null innerhalb der Addition im Zahlenraum 0 bis 20 als Problem pädagogischer Vermittlung. Diss. Heidelberg: Pädagogische Hochschule.