

Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Lehrstuhl für angewandte Mathematik und Numerik
Prof. Dr. Stefan Turek
Dr. Thomas Hübner

Ausarbeitung zum WiMa-Praktikum
WS 2013/14

Thema:
Finite-Differenzen Verfahren für die
Black-Scholes-Differentialgleichung

Verfasser: Lisa Thiemann
Martin Anstots
Patrick Kraft
Ying Liu
Lijuan Guo
Jennifer Joosten

Dortmund, den 17.05.2014.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung in die Thematik	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Gang der Untersuchung	1
2	Grundlagen der Optionspreistheorie	2
2.1	Optionen und das Black-Scholes-Modell	2
2.2	Konditionierung anhand der Greeks	7
3	Finite-Differenzen Verfahren	8
3.1	Zeitdiskretisierung	9
3.1.1	Explizite Euler Methode	9
3.1.2	Implizite Euler Methode	11
3.1.3	Crank-Nicolson Methode	13
3.1.4	Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung	14
3.2	Ortsdiskretisierung	16
3.2.1	Upwind-Diskretisierung	16
3.2.2	Upwind-Diskretisierung der instationären Black-Scholes-Gleichung	21
3.3	Konsistenz und Stabilität	22
3.4	Fehleranalyse	24
3.5	Zwischenfazit	27
4	Notwendigkeit einer Transformation	28
4.1	Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung	28
4.2	Einfluss der Volatilität	29
4.3	Zwischenfazit	32
5	Löser	34
5.1	Jacobi-Verfahren	34
5.2	SOR-Verfahren	36
5.3	GMRES-Verfahren	37
5.4	LR-Zerlegung	38
5.5	Zwischenfazit	39
6	Praktische Anwendung	40
6.1	Prüfung der Modellvoraussetzung	40
6.2	Volatilität	41
6.3	Beispiel der BVB-Aktie	42
6.3.1	Einführung	42
6.3.2	Optionspreise	43
6.4	Die Greeks der BVB-Aktie	44
7	Gesamtfazit	46

Abbildungsverzeichnis

1	Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems	19
2	Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems mit Oszillation .	19
3	Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems mit Upwind - Diskretisierung	20
4	Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems mit künstlicher Diffusion	21
5	Call-Preis mit expliziter Euler Methode ohne Stabilität	24
6	Call-Preis mit expliziter Euler Methode mit Stabilität	25
7	Lösung der nicht transformierten Black-Scholes-Gleichung für eine Call- Option in Abhängigkeit der Volatilität (Beispiel 1)	30
8	Lösung der nicht transformierten Black-Scholes-Gleichung in Abhängigkeit der Volatilität für eine Call-Option (Beispiel 2)	31
9	Lösung der transformierten Black-Scholes-Gleichung in Abhängigkeit der Volatilität für eine Call-Option (Beispiel 2)	32
10	Historische Kurse des 12-Monats EURIBOR	33
11	Entwicklung der BVB-Aktie	42
12	Die Greeks der BVB-Aktie	45

Tabellenverzeichnis

1	Absoluter Fehler beim impliziten Euler Verfahren	25
2	Absoluter Fehler beim Crank-Nicolson Verfahren	26
3	Absoluter Fehler beim Upwind-Verfahren mit impliziter Euler Zeitdiskretisierung	26
4	Absoluter Fehler beim Upwind-Verfahren mit Crank-Nicolson Zeitdiskretisierung	27
5	Gesamtzeit in Sekunden beim Jacobi-Verfahren	36
6	Maximale Iterationszahl beim Jacobi-Verfahren	36
7	Gesamtzeit in Sekunden beim SOR-Verfahren	37
8	Maximale Iterationszahl beim SOR-Verfahren	37
9	Gesamtzeit in Sekunden beim GMRES-Verfahren	38
10	Maximale Iterationszahl beim GMRES-Verfahren	38
11	Gesamtzeit in Sekunden bei der LR-Zerlegung	39

1 Einleitung in die Thematik

1.1 Problemstellung

Ein wichtiges Problem in der Finanzwirtschaft besteht in der Ermittlung der fairen Optionspreise. Aus diesem Grund beschäftigt sich die vorliegende Arbeit mit der Bepreisung von Optionen mithilfe von Finite-Differenzen Verfahren:

Die Bedeutung solcher Preisermittlungen für Optionen wird an dem folgenden Beispiel erläutert.

Angenommen ein Investor besitzt 1.000 BVB-Aktien, die einen aktuellen Kurs von 3.73 € pro Aktie (16.1.2014) haben. In einem Jahr ($T = 1$) möchte dieser Investor seine Aktien für mindestens 3.73 € pro Aktie verkaufen, um mit diesem Geschäft keinen Verlust zu machen. Allerdings befürchtet er, dass der Kurs der BVB-Aktie im Laufe des Jahres fallen könnte. Aufgrund dessen möchte er Verkaufsoptionen, sogenannte Put-Optionen, auf diese Aktien erwerben, wodurch er gegen einen möglichen Verlust abgesichert wäre. Die Schwierigkeit, die sich aus dieser Situation ergibt, besteht in der heutigen Ermittlung eines fairen Preises für diese Option zum Zeitpunkt $t = 0$.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Möglichkeit vorgestellt, wie mit Hilfe von Finite-Differenzen Verfahren dieser faire Preis ermittelt werden kann. Abschließend werden diese Methoden auf reale Daten angewandt.

1.2 Gang der Untersuchung

Um die verschiedenen Finite-Differenzen Methoden auf das Problem anwenden zu können, werden im zweiten Kapitel als erstes die Grundlagen zu Optionen und das Black-Scholes-Modell vorgestellt. In diesem Modell lässt sich eine partielle Differentialgleichung zur Berechnung des Optionspreises herleiten. Im dritten Kapitel werden zunächst die Grundlagen zu den Finite-Differenzen Verfahren erläutert, bevor die Methoden auf ihre Konsistenz und Stabilität untersucht werden. Im Anschluss daran werden die unterschiedlichen Finite-Differenzen Methoden im Rahmen einer Fehleranalyse auf ihre Eignung überprüft.

Das vierte Kapitel erörtert die Notwendigkeit einer Transformation der Black-Scholes-Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung und untersucht den Einfluss der Volatilität, welche die Schwankungen des Aktienkurses beschreibt.

Zum Abschluss der theoretischen Überlegungen werden im fünften Kapitel verschiedene Löser für Lineare Gleichungssysteme vorgestellt und ihre Schnelligkeit analysiert.

Die Anwendung der theoretischen Resultate auf das obige Eingangsbeispiel findet im sechsten Kapitel statt. Im siebten Kapitel wird dann ein Gesamtfazit der vorliegenden Arbeit gezogen.

2 Grundlagen der Optionspreistheorie

2.1 Optionen und das Black-Scholes-Modell

Bevor sich die vorliegende Arbeit mit den unterschiedlichen Verfahren beschäftigen kann, müssen die grundsätzlichen Voraussetzungen erläutert werden. Als erstes stellt sich die Frage nach der Definition einer Option.

Aufgrund dessen wird in diesem Unterkapitel eine kurze Definition zur Option gegeben und das Black-Scholes-Modell vorgestellt.

Definition 2.1 *Option*

Eine Option gibt dem Käufer das Recht, aber nicht die Verpflichtung, eine bestimmte Transaktion am oder bis zum Verfallstag zu einem festgelegten Ausübungspreis (Strike) zu tätigen.

Eine Option kann dabei in verschiedener Gestalt konstruiert werden. Es gibt die europäischen, die amerikanischen und die exotischen Optionen. Bei europäischen Optionen kann das oben beschriebene Recht nur zum Endzeitpunkt T ausgeübt werden, wohingegen bei den amerikanischen Optionen dieses Recht kontinuierlich während der gesamten Laufzeit besteht. Ein Beispiel für eine exotische Option ist die Bermuda Option. Bei dieser kann das Recht zu mehreren, allerdings vorher festgelegten Zeitpunkten $0 \leq t_i \leq T \forall i$ ausgeübt werden.

Die vorliegende Arbeit wird sich auf die Ermittlung des fairen Preises für europäische Optionen konzentrieren. Im Hinblick darauf kann das Black-Scholes-Modell verwendet werden. Darunter wird ein finanzmathematisches Modell verstanden, mit dessen Hilfe Optionen bewertet werden können. Dieses Modell wurde 1973 von Fischer Black und Myron Samuel Scholes veröffentlicht und dient auch heutzutage als Grundlage für die Bewertung von Optionen in der Finanzindustrie.¹ Das Black-Scholes-Modell basiert auf einer partiellen Differentialgleichung in den Variablen (x, t)

$$au_{tt} + 2bu_{xt} + cu_{xx} + du_t + eu_x + fu = g, \quad (2.1.1)$$

genauer genommen auf einer parabolischen, für die

$$b(x, t)^2 - a(x, t)c(x, t) = 0$$

für alle x, t erfüllt sein muss.

Die Herleitung der Black-Scholes-Gleichung wird an späterer Stelle in diesem Projekt erläutert.

¹Black und Scholes haben für die Entwicklung des Black-Scholes-Modells den Nobelpreis erhalten.

Kapitel 2: Grundlagen der Optionspreistheorie

Zur Diskretisierung der parabolischen Differentialgleichung (Black-Scholes-Modell) existieren die folgenden Ansätze:

- die Finite-Elementen Verfahren und
- die Finite-Differenzen Verfahren.

Zu den Finite-Elementen Verfahren gehören unter anderem die Linienmethode und die Rothe-Methode, wohingegen das Crank-Nicolson Verfahren, das explizite und implizite Euler Verfahren und die Upwind-Diskretisierung Beispiele für Finite-Differenzen Verfahren sind. Die Linienmethode ist zur Diskretisierung im Rahmen der Bewertung von Optionen nicht geeignet, da zeitabhängige Verfeinerungen der Schrittweiten bei diesem Verfahren nicht möglich sind. Die Rothe-Methode wäre hingegen zur Diskretisierung zwar geeignet, stellt aber einen höheren Implementierungsaufwand im Vergleich zu den Verfahren der Finite-Differenzen dar. Aufgrund dessen wird die in diesem Projekt zu lösende parabolische Differentialgleichung, auf die das Black-Scholes Modell basiert, mithilfe der Finite-Differenzen Verfahren diskretisiert.

Bevor die Black-Scholes Gleichung hergeleitet und mit der Diskretisierung begonnen werden kann, müssen zunächst die zu erfüllenden Modellvoraussetzungen präzisiert werden:

Definition 2.2 *Modellvoraussetzungen*

1. *Konstanter risikoloser Zinssatz $r \geq 0$.*
2. *Keine Dividendenzahlung auf den Aktienkurs S .*
3. *Markt ist arbitragefrei, liquide und friktionslos.*
4. *Aktienkurs kann kontinuierlich gehandelt werden, ist beliebig teilbar.*
5. *Leerverkäufe sind erlaubt.*
6. *Stetige stochastische Prozesse.*

Sind diese Modellvoraussetzungen erfüllt, kann mithilfe des Lemmas von Itô die Black-Scholes-Gleichung hergeleitet werden.

Dazu wird zunächst das Lemma von Itô betrachtet:

Lemma 2.3 *von Itô*

Sei X_t ein Itô - Prozess und $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$.

Dann ist der stochastische Prozess $f_t = f(X_t, t)$ ein Itô - Prozess und es gilt:

$$df = \left(\frac{\delta f}{\delta t} + a \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right) dt + b \frac{\delta f}{\delta x} dW.$$

Kapitel 2: Grundlagen der Optionspreistheorie

Vor der eigentlichen Herleitung der Black-Scholes-Gleichung wird noch die folgende Schreibweise eingeführt:

Sei $V(S, t)$ der Wert einer Option und Y_t ein Portfolio, welches aus Anteilen des Basiswertes und einer verkauften Optionen besteht. Dann kann das Portfolio Y_t geschrieben werden als

$$Y_t = c(t)S - V(S, t),$$

wobei $c(t)$ der Anteil des Basiswertes ist.

Darüber hinaus müssen für die Herleitung die folgenden drei Annahmen getroffen werden:

Annahme 1:

Der Kurs des zugrundeliegenden Basiswerts S entspricht der folgenden stochastischen Differentialgleichung

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (2.1.2)$$

mit den konstanten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \geq 0$.

Annahme 2:

Das obige Portfolio Y_t ist risikolos. Darunter wird verstanden, dass ein risikoloses Portfolio aufgrund der Arbitrage-Freiheit den gleichen Gewinn erzielt wie eine risikolose Anlage, d.h. es gilt

$$dY_t = rY_t dt$$

Annahme 3:

Das Portfolio Y_t ist des Weiteren selbstfinanzierend, d.h.

$$dY_t = c(t)dS - dV(S, t). \quad (2.1.3)$$

Mithilfe dieser Annahmen kann die Black-Scholes-Gleichung hergeleitet werden.

Nach dem Lemma von Itô folgt für den Wert einer Option $V(S, t)$ zum Zeitpunkt t die Differentialgleichung

$$dV = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt + \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} dW. \quad (2.1.4)$$

Werden die Gleichungen (2.1.2) und (2.1.4) in die Gleichung (2.1.3) eingesetzt, erhält man

$$dY_t = \left[c\mu S - \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) \right] dt \quad (2.1.5)$$

$$+ \left(c\sigma S - \sigma S \frac{\delta V}{\delta S} \right) dW. \quad (2.1.6)$$

Kapitel 2: Grundlagen der Optionspreistheorie

Durch die Forderung eines risikolosen Portfolios Y_t , kann $c(t)$ als

$$c(t) = \frac{\delta V}{\delta S}(S, t)$$

gewählt werden.

Durch diese Wahl kann die Gleichung (2.1.5) zu

$$dY_t = \left[c\mu S - \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \mu S \frac{\delta V}{\delta S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) \right] dt \quad (2.1.7)$$

vereinfacht werden.

Das Einsetzen des dY_t aus Formel (2.1.6) und von $Y_t = c(t)S - V(S, t)$ in die Gleichung

$$dY_t = rY_t dt,$$

ergibt

$$\begin{aligned} r \left(\frac{\delta V}{\delta S} S - V \right) dt &= \left(c\mu S - \frac{\delta V}{\delta t} - \mu S \frac{\delta V}{\delta S} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt \\ &= \left(- \frac{\delta V}{\delta t} - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \right) dt. \end{aligned}$$

Durch Umformen erhält man die **Black-Scholes-Gleichung**:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS \frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen partiellen Differentialgleichung (2.1.1) kommt man zu dem Resultat, dass es sich tatsächlich um eine parabolische Differentialgleichung handelt, da gilt:

$$a(x, t) = 0 \text{ und } b(x, t) = 0.^2$$

Im Folgenden werden die Rand - und Endbedingungen angegeben.

Randbedingungen:

1. europäischer Call: $C(0, t) = 0$, $C(S, t) \sim S$ ($S \rightarrow \infty$),
2. europäischer Put: $P(0, t) = Ke^{-r(T-t)}$, $P(S, t) \rightarrow 0$ ($S \rightarrow \infty$).

²Wobei für die Black-Scholes-Gleichung gilt, dass $x = S$ ist.

Endbedingungen:

1. europäischer Call: $C(S, T) = (S - K)^+$,
2. europäischer Put: $P(S, T) = (K - S)^+$.

Unter Verwendung der Black-Scholes-Gleichung und der angeführten Rand- und Endbedingungen kann man für europäische Optionen mithilfe des nächsten Satzes die analytische Lösung berechnen:

Satz 2.4 *Europäische Call-Option*

Die Black - Scholes - Gleichung mit den obigen Rand- und Endbedingungen besitzt die Lösung

$$C(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \quad 0 < S, \quad 0 \leq t < T,$$

mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds, \quad x \in \mathbb{R},$$

und mit

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Beweis:

Es wird nur eine Beweisskizze dieses Satzes gegeben.

1. Transformation der Black-Scholes-Gleichung in die Wärmeleitungsgleichung

$$u_\rho = u_{xx}.$$

2. Lösen des Problems

$$u_\rho = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho \in (0, T_0],$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = (e^{(k+1)x/2} - e^{(k-1)x/2})^+.$$

3. Rücktransformation in die ursprünglichen Variablen.
4. Überprüfung der Rand- und Endbedingungen.



Bevor im nächsten Teilkapitel die Konditionierung der Optionspreise betrachtet wird, muss zunächst die Berechnung der analytischen Lösung für eine Put-Option erläutert werden.

Satz 2.5 *Europäische Put-Option*

Die Black-Scholes-Gleichung mit den obigen Rand- und Endbedingungen besitzt die Lösung

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1), \quad 0 < S, \quad 0 \leq t < T,$$

mit Φ bzw. $d_{1,2}$ wie oben definiert.

Beweis:

Durch Einsetzen der Call-Option in die Put-Call-Parität³ und Ausnutzen der Beziehung $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(S, t) &= C(S, t) - S + Ke^{-r(T-t)} \\ &= S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S + Ke^{-r(T-t)} \\ &= S(\Phi(d_1) - 1) - Ke^{-r(T-t)}(\Phi(d_2) - 1) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \end{aligned}$$



2.2 Konditionierung anhand der Greeks

Im Folgenden wird erläutert, wie die Optionspreise anhand der sogenannten Greeks charakterisiert werden können. Aufgrund dessen wird zunächst die Definition der Greeks gegeben.

³Die Put-Call-Parität ist gegeben durch $S_t + P_t - C_t = Ke^{-r(T-t)}$. Für weitere Informationen hierzu siehe: Mathematics of Financial Markets.

Definition 2.6 *Greeks*

Unter *Greeks* versteht man dynamische Kennzahlen, welche eine zeitpunktbezogene Abschätzung der Preisentwicklung der Optionen erlauben.

Für eine Call- bzw. Put-Option V können die folgenden dynamischen Kennzahlen definiert werden:

$$\text{Delta: } \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

$$\text{Gamma: } \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

$$\text{Kappa: } \kappa = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

$$\text{Theta: } \theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\text{Rho: } \rho = \frac{\partial V}{\partial r}$$

Mithilfe dieser dynamischen Kennzahlen kann analysiert werden, wie sich der Optionspreis in Abhängigkeit von der Änderung des jeweiligen Parameters verändert. In der numerischen Mathematik sind dies die Konditionszahlen. Ein Problem ist gut konditioniert, wenn die Lösung gegenüber kleinen Änderungen des Parameters nicht sehr sensitiv ist. Im anderen Fall wird das Problem als schlecht konditioniert bezeichnet.

Die dynamischen Kennzahlen finden beispielsweise bei der Risikobegrenzung bei Hedging-Strategien (Delta-Hedging) Anwendung.

Die Berechnung der Greeks ist relativ einfach, wenn der Preis der europäischen Option durch die oben dargestellte analytischen Lösung gegeben ist. Ist dies nicht der Fall, müssen die Greeks - ebenso wie die Black-Scholes-Gleichung - mithilfe von Finite-Differenzen Verfahren gelöst werden.

3 Finite-Differenzen Verfahren

Die Idee bei den Finite-Differenzen Verfahren besteht darin, das zu untersuchende Gebiet zu diskretisieren und dann die Ableitungen mithilfe von Differenzenquotienten zu approximieren.

Zur Diskretisierung wird ein äquidistantes Gitter auf dem Gebiet $[0, S_{max}] \times [0, t]$ eingeführt, wo die Optionspreisfunktion $V(S, t)$ gelöst werden soll. Teilt man die Ortsachse in M Abschnitte und die Zeitachse in N Abschnitte ein, sind die Gitterpunkte (S_i, t_j) gegeben durch

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

$$S_i = i\Delta S \text{ für } i = 1, \dots, M$$
$$t_j = j\Delta t \text{ für } j = 1, \dots, N$$

mit

$$\Delta S = \frac{S_{max}}{M} \text{ und } \Delta t = \frac{T}{N}.$$

An diesen Gitterpunkten werden die Differentiale der Black-Scholes-Gleichung nun durch Differenzenquotienten ersetzt.

Im Folgenden werden die verschiedenen Methoden zur Zeit- und Ortsdiskretisierung vorgestellt und auf die Black-Scholes-Gleichung zur Optionspreisberechnung angewendet. Insbesondere werden die Methoden auf ihre Konsistenz und Stabilität hin bewertet. Dabei heißt ein Verfahren konsistent, wenn der Fehler, den man erhält, wenn die exakte Lösung ins Differenzenverfahren eingesetzt wird, beschränkt ist. Außerdem heißt ein Verfahren stabil, wenn die Differenz zwischen der numerischen und der exakten Lösung beschränkt bleibt, falls die Anzahl der Schritte gegen unendlich geht.

3.1 Zeitdiskretisierung

In diesem Abschnitt werden drei verschiedene Methoden zur Zeitdiskretisierung ohne Betrachtung der Ortsdiskretisierung anhand der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

analysiert. Die Wärmeleitungsgleichung hat eine einfachere Struktur und kann aus der Black-Scholes-Gleichung durch Variablentransformation hergeleitet werden, welches in Kapitel 4 erläutert wird.

3.1.1 Explizite Euler Methode

Bei der expliziten Methode wird zur Approximation des Differentials nach der Zeit der folgende Vorwärts-Differenzenquotient benutzt:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Konstruiert wird dieser Differenzenquotient mit Hilfe des Taylorpolynoms

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, \xi), \quad \xi \in (t, t + \Delta t).$$

Hierbei fallen die Terme höherer Ordnung weg und die Gleichung kann nach der ersten Ableitung umgestellt werden, wodurch man den obigen Differenzenquotienten erhält.

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

Diese Zeitdiskretisierung kann gemeinsam mit der Ortsdiskretisierung in die Wärmeleitungsgleichung eingesetzt werden. Damit ergibt sich:

$$\frac{f(x, t + \Delta t) - f(x, t)}{\Delta t} = \frac{f(x + \Delta x, t) - 2f(x, t) + f(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2}.$$

Stellt man nun diese Gleichung explizit nach $f(x_i, t_{j+1}) = f_{i,j+1}$ um, erhält man:

$$f_{i,j+1} = \lambda f_{i+1,j} + (1 - 2\lambda) f_{i,j} + \lambda f_{i-1,j},$$

wobei $\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. Diese Gleichungen können nun durch die Gleichung $f^{j+1} = A f^j$ auch in Matrix-Vektor-Schreibweise dargestellt werden. Dabei ist $A := (I - \lambda G)$, wobei I eine Einheitsmatrix ist und

$$G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Besonders interessant bei Differenzenverfahren ist die Frage nach der Stabilität. Dazu wird im Folgenden die gestörte Lösung des obigen Gleichungssystems $\tilde{f}^{j+1} = A \tilde{f}^j + r^j$ untersucht, wobei r^j der Rundungsfehler im Schritt j ist. Damit ergibt sich nun der Fehlervektor $e^j := \tilde{f}^j - f^j$. Für ein stabiles Verfahren muss nun gelten:

$$e^j = A^j e^0 \rightarrow 0 \text{ für } j \rightarrow \infty,$$

wobei der Rundungsfehler an dieser Stelle vernachlässigt werden kann. Um diese Aussage testen zu können, hilft das folgende bekannte Lemma aus der Numerik:

Lemma 3.1 *Für den Spektralradius $\rho(A)$ einer Matrix A sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- $\rho(A) < 1$,
- $\lim_{j \rightarrow \infty} A^j e = 0$ für alle $e \in \mathbb{R}^n$.

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun die Stabilität der expliziten Methode getestet werden. Dazu werden die Eigenwerte der Matrix A berechnet, um den Spektralradius von A bestimmen zu können. Die Eigenwerte von G lauten:

$$\mu_k = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2M}\right), k = 1, \dots, M - 1$$

und damit gilt für die Eigenwerte von A

$$\mu_k^A = 1 - 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi}{2M}\right).$$

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

Daraus folgt, dass das Verfahren genau dann stabil ist, wenn $|\mu_k^A| < 1$ gilt. Diese Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn $\lambda > 0$ und $\lambda \leq \frac{1}{2}$ gilt. Das bedeutet, dass die explizite Methode nicht uneingeschränkt stabil ist, sondern nur, wenn die Zeitschrittweite halb so groß wie die Ortsschrittweite ist. Mit dieser Bedingung geht natürlich ein deutlich höherer Rechenaufwand einher.

Zusammenfassend kann man festhalten, dass die explizite Methode sehr einfach zu berechnen ist, da die Gleichungen direkt gelöst werden können. Leider ist die Methode nicht uneingeschränkt stabil, sondern nur für $\lambda < 0.5$. Des Weiteren ist der Konsistenzfehler nur von der Ordnung $O(\Delta t)$.

Aus diesen Gründen ist die explizite Methode nicht besonders gut zur Approximation des Differentials nach der Zeit geeignet. Daher werden in den nächsten Abschnitten bessere Alternativen vorgestellt.

3.1.2 Implizite Euler Methode

Die implizite Euler Methode benutzt zur Approximation des Differentials nach der Zeit den Rückwärts-Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{f(x, t) - f(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Dieser kann für $f \in \mathcal{C}^2(t)$ aus dem Taylorpolynom

$$f(x, t - \Delta t) = f(x, t) - \Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, \xi), \quad \xi \in (t - \Delta t, t)$$

konstruiert werden, indem man die Terme höherer Ordnung wegfällt lässt und die Gleichung nach der ersten Ableitung umstellt.

Zusammen mit der Ortsdiskretisierung eingesetzt in die Wärmeleitungsgleichung erhält man für $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ ein System von gekoppelten Gleichungen für $f_{i,j} = f(x_i, t_j)$

$$-\lambda f_{i+1,j} + (2\lambda + 1)f_{i,j} - \lambda f_{i-1,j} = f_{i,j-1}.$$

Dies lässt sich in Matrix-Vektor Schreibweise darstellen durch einen Vektor mit den gesuchten Lösungen $f^j = (f_{1,j}, \dots, f_{N-1,j})^T$ der implizit definiert ist durch $Af^j = f^{j-1}$ für $j = 1, \dots, N - 1$ mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & & 0 \\ -\lambda & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -\lambda \\ 0 & & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (M-1)}.$$

Zur Berechnung von Lösungen muss damit beim impliziten Euler Verfahren ein Lineares Gleichungssystem gelöst werden, wobei sich die Frage stellt, ob bei diesem Gleichungssystem überhaupt Lösungen existieren.

Wenn die Determinante der Matrix A ungleich Null ist, existiert eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems und der folgende Satz von Gerschgorin hilft dabei Aussagen über die Eigenwerte von A treffen zu können.

Satz 3.2 Satz von Gerschgorin

Sei A eine $n \times n$ Matrix mit Koeffizienten $a_{i,j}$. Dann gilt für die Eigenwerte μ von A :

$$\mu \in \bigcup_{i=1}^n \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \right\}$$

Die bei der impliziten Euler Methode gegebenen Matrix A ist striktdiagonaldominant und somit gilt

$$|a_{i,i}| = 1 + 2\lambda > 2\lambda = \sum_{j=1, j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Nach dem Satz von Gerschgorin kann die Zahl null kein Eigenwert der Matrix A sein. Die Determinante von A ist infolgedessen ungleich null, sodass das Lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung besitzt.

Damit das implizite Euler Verfahren stabil ist muss für den Spektralradius der Matrix A^{-1} , wie beim expliziten Euler Verfahren $\rho(A^{-1}) < 1$ gelten.

Da die Matrix A von der Gestalt $A = (I + \lambda G)$ ist mit

$$G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

erhält man mit den Eigenwerten von G , welche gegeben sind durch $\mu_k^G = 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2M})$ für $k = 1, \dots, M - 1$, dass für die Eigenwerte von A^{-1} gilt:

$$\mu_k^{A^{-1}} = \frac{1}{1 + \lambda 4 \sin^2(\frac{k\pi}{2M})} < 1.$$

Zusammenfassend ist die implizite Euler Methode damit uneingeschränkt stabil und Δt und Δx können unabhängig voneinander gewählt werden, welches ein Vorteil gegenüber der expliziten Euler Methode darstellt. Allerdings muss bei dieser Methode ein Lineares Gleichungssystem gelöst werden und der Konsistenzfehler ist von der Ordnung $O(\Delta t)$.

3.1.3 Crank-Nicolson Methode

Als drittes Verfahren zur Zeitdiskretisierung wird in diesem Abschnitt die Crank-Nicolson Methode erläutert. Bei dieser Methode wird zur Approximation ein zentraler Differenzenquotient verwendet

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = \frac{f(x, t + \frac{1}{2}\Delta t) - f(x, t - \frac{1}{2}\Delta t)}{\Delta t} + O((\Delta t)^2).$$

Für $f \in \mathcal{C}^3(t)$ kann dieser Differenzenquotient aus der Differenz der beiden folgenden Taylorpolynome hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} f(x, t + \frac{1}{2}\Delta t) &= f(x, t) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) + \frac{(\Delta t)^3}{48} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x, \xi), \\ f(x, t - \frac{1}{2}\Delta t) &= f(x, t) - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + \frac{(\Delta t)^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) - \frac{(\Delta t)^3}{48} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(x, \eta), \end{aligned}$$

mit $\xi \in (t, t + \frac{1}{2}\Delta t)$ und $\eta \in (t - \frac{1}{2}\Delta t, t)$.

Mit dem zentralen Differenzenquotienten und mit der Ortsdiskretisierung eingesetzt in die Wärmeleitungsgleichung erhält man die folgende Gleichung:

$$-\frac{\lambda}{2}f_{i-1,j+1} + (1 + \lambda)f_{i,j+1} - \frac{\lambda}{2}f_{i+1,j+1} = \frac{\lambda}{2}f_{i-1,j} + (1 - \lambda)f_{i,j} + \frac{\lambda}{2}f_{i+1,j}.$$

Dieses lässt sich in Matrix-Vektor Schreibweise wieder darstellen durch ein Gleichungssystem

$$Af^{j+1} = Bf^j \text{ für } j = 1, \dots, N - 1 \text{ mit}$$

$$A := \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & & \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Analog zum impliziten Euler Verfahren kann mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin gezeigt werden, dass eine eindeutige Lösung des obigen linearen Gleichungssystem existiert. Im Folgenden wird diese Methode auf das Kriterium der Stabilität überprüft.

Für die Analyse der Stabilität bei der Crank-Nicolson Methode werden die Matrizen in $A = (I + \frac{\lambda}{2}G)$ und $B = (I - \frac{\lambda}{2}G)$ mit

$$G := \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

zerlegt. Des Weiteren ergibt sich mit einer Matrix $C := (2I + \lambda G)$ die folgenden Äquivalenzgleichungen:

$$\begin{aligned} (2I + \lambda G)f^{j+1} &= (2I\lambda - G)f^j \\ \Leftrightarrow C f^{j+1} &= (4I - C)f^j \\ \Leftrightarrow f^{j+1} &= (4C^{-1} - I)f^j. \end{aligned}$$

Mit der Argumentation zur Stabilität bei der expliziten Euler Methode und den Rechenregeln für Eigenwerte muss damit für die Stabilität in diesem Fall gelten:

$$\frac{4}{\mu_k^C} - 1 < 1 \text{ für } k = 1, \dots, M - 1.$$

Da die Eigenwerte von C gegeben sind durch $\mu_k^C = 2 + \lambda\mu_k^G = 2 + 4\lambda \sin^2(\frac{k\pi}{2M}) > 2$ folgt, dass die Crank-Nicolson-Methode uneingeschränkt stabil ist.

Obwohl bei der Crank-Nicolson-Methode ein Lineares Gleichungssystem zu lösen ist, ist diese den anderen Methoden vorzuziehen, da diese Methode eine Konsistenzfehlerordnung von $O((\Delta t)^2)$ besitzt.

3.1.4 Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung

Zum Schluss dieses Abschnitts werden die anhand der Wärmeleitungsgleichung vorgestellten Methoden zur Zeitdiskretisierung nun auf die in Kapitel 2 hergeleitete Black-Scholes-Gleichung zur Berechnung von Preisen für europäischen Optionen angewandt.

Bei der sogenannten Theta-Methode werden die verschiedenen Zeitdiskretisierungen durch die Variable θ zusammengefasst. Zusammen mit den zentralen Differenzenquotienten zur Ortsdiskretisierungen, welche im nächsten Abschnitt erläutert werden, eingesetzt in die Black-Scholes-Differentialgleichung, erhält man für $i = 1, \dots, M$ und $j = 1, \dots, N$ folgendes System von Gleichungen:

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

$$(1 - \theta)a_i V_{i-1,j+1} + \left[(1 - \theta)b_i - \frac{1}{\Delta t}\right] V_{i,j+1} + (1 - \theta)c_i V_{i+1,j+1} \quad (3.1.8)$$

$$= -\theta a_i V_{i-1,j} - \left[\theta b_i + \frac{1}{\Delta t}\right] V_{i,j} - \theta c_i V_{i+1,j},$$

wobei die Koeffizienten definiert sind durch

$$a_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{(\Delta S)^2} S_i^2 - \frac{r}{\Delta S} S_i \right),$$

$$b_i = -\frac{\sigma^2}{(\Delta S)^2} S_i^2 - r,$$

$$c_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{(\Delta S)^2} S_i^2 + \frac{r}{\Delta S} S_i \right).$$

Die Gleichung (3.1.8) kann als lineares Gleichungssystem mit dem unbekanntem Vektor $V^j = (V_1^j, \dots, V_M^j)^T$ wie folgt aufgefasst werden:

$$AV^{j-1} = BV^j + d^j, \quad \text{für } j = 1, \dots, N$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} (1 - \theta)b_1 - \frac{1}{\Delta t} & (1 - \theta)c_1 & 0 \\ (1 - \theta)a_2 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} -\theta b_1 - \frac{1}{\Delta t} & -\theta c_1 & 0 \\ -\theta a_2 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei enthält der Vektor d^j die Randbedingungen, die beispielsweise für eine Call-Option für $i = 0, \dots, M$ bzw. $j = 0, \dots, N$ festgelegt sind durch

$$V_{0,j} = 0, \quad V_{M,j} = M\Delta S - K e^{-r(N-j)\Delta t}.$$

Zur Berechnung des Optionspreises $V(S, t)$ müssen die linearen Gleichungssysteme aufgrund der vorgegebenen Endbedingung für $V_{i,N} = \max\{i\Delta S - K, 0\}$ rekursiv rückwärts gelöst werden.

Für $\theta = 1$ erhält man das explizite Euler Verfahren, welches den Vorwärtsdifferenzenquotienten verwendet und bei dem die Matrix A wegfällt, so dass nur eine Matrix-Vektor Multiplikation zur Berechnung ausgeführt werden muss.

Wählt man hingegen $\theta = 0$, handelt es sich um das implizite Euler Verfahren, welches den Rückwärtsdifferenzenquotienten benutzt.

Für die Wahl von $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man dann das Crank-Nicolson Verfahren mit dem Zentralen Differenzenquotienten für die Zeitdiskretisierung.

3.2 Ortsdiskretisierung

Nach der Vorstellung der Methoden zur Zeitdiskretisierung wird in diesem Abschnitt die Ortsdiskretisierung unabhängig von der Zeitdiskretisierung analysiert. Dazu werden Differenzenquotienten benötigt, welche die partiellen Ortsableitungen $\frac{\partial V}{\partial S}$ und $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ approximieren, welche den Ableitungen nach dem Aktienkurs entsprechen.

Eine Möglichkeit, die partielle Ortsableitungen $\frac{\partial V}{\partial S}$ zu approximieren, ist den bereits bekannten zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial S}(S, t) = \frac{V(S + \Delta S, t) - V(S - \Delta S, t)}{2\Delta S},$$

zu verwenden, welcher einen Konsistenzfehler von $O((\Delta S)^2)$ liefert. Falls die Funktion V hinreichend regulär bzgl. S ist, gilt mit der Taylorformel

$$V(S + \Delta S, t) = V(S, t) + \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(\Delta S)^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(S, t)(\Delta S)^3 + O((\Delta S)^4)$$

$$V(S - \Delta S, t) = V(S, t) - \frac{\partial V}{\partial S}(S, t)\Delta S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t)(\Delta S)^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}(S, t)(\Delta S)^3 + O((\Delta S)^4).$$

Durch Addition der beiden obigen Gleichungen erhält man einen zentralen Differenzenquotienten für die zweite partielle Ortsableitung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S, t) = \frac{V(S + \Delta S, t) - 2V(S, t) + V(S - \Delta S, t)}{(\Delta S)^2} + O((\Delta S)^2),$$

mit einer Konsistenzordnung von $O((\Delta S)^2)$.

Eine andere Möglichkeit zur Ortsdiskretisierung stellt das sogenannte Upwind-Verfahren dar, welches im nächsten Abschnitt näher betrachtet wird.

3.2.1 Upwind-Diskretisierung

In diesem Kapitel wird das Upwind-Verfahren, welches für konvektions-dominante parabolische Differentialgleichungen besonders geeignet ist, vorgestellt.

Für eine einfachere Analyse wird die Black-Scholes-Gleichung zuerst im Folgenden auf ein Sturm-Liouville-Problem transformiert.

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

Nach Kapitel 2 ist die Black-Scholes-Gleichung für den Wert $V(S, t)$ einer Standard-Option gegeben durch

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}}_{\text{Diffusionsterm}} + \underbrace{rS \frac{\partial V}{\partial S}}_{\text{Konvektionsterm}} - rV = 0,$$

$$V(S, T) = \max\{S_T - K, 0\}$$

mit $S \geq 0$ und $0 \leq t \leq T$. Um diese Gleichung auf das Sturm-Liouville-Problem zu transformieren, betrachtet man die stationäre Gleichung mit

$$\begin{aligned} x &= \ln(S) & v(x) &= V(S) \\ SV_S &= S \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dS} = v_x, \\ S^2 V_{SS} &= S(SV_S)_S - SV_S = v_{xx} - v_x. \end{aligned}$$

Dadurch erhält man ein Sturm-Liouville-Problem mit konstanten Koeffizienten

$$-\frac{\sigma^2}{2}v_{xx} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)v_x + rv = 0, \quad x \in I = [a, b] \text{ und } a, b \in \mathbb{R} \quad (3.2.9)$$

und der Anfangsbedingung

$$v(a) = \alpha, \quad v(b) = \beta$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Unter den Standardvoraussetzungen

$$\sigma^2, \frac{\sigma^2}{2} - r \in \mathcal{C}^1(I), \quad r \in \mathcal{C}(I), \quad \sigma^2 \geq c > 0$$

und falls zusätzlich

$$c + (b - a)^2 r > 0$$

gilt, besitzt dieses Sturm-Liouville-Problem (3.2.9) eine eindeutige Lösung $v \in \mathcal{C}^2(I)$. Zur Diskretisierung von (3.2.9) sei (zur Vereinfachung) ein äquidistantes Punktgitter $a = x_0 < \dots < x_{N+1} = b$, $I_n = [x_{n-1}, x_n]$, $x_n - x_{n-1} = h = \frac{b-a}{N+1}$ zugrunde gelegt. Das Differenzenanalogon des Problems lautet dann:

$$\begin{aligned} L_h v_i &:= -\frac{\sigma^2(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}))}{2h^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + rv_i = 0, \\ 1 &\leq i \leq N, \\ v_0 &= \alpha, \quad v_{N+1} = \beta. \end{aligned}$$

Durch Elimination der bekannten Randwerte $v_0 = \alpha$, $v_{N+1} = \beta$ wird dieses System auf ein $N \times N$ -System

$$A_h v_h = b_h$$

für den Vektor $v^h = (v_1, \dots, v_N)^T$ reduziert mit der $N \times N$ - Matrix

$$A_h := \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2\sigma^2 + 2rh^2 & \frac{\sigma^2 h}{2} - rh - \sigma^2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ rh - \frac{\sigma^2 h}{2} - \sigma^2 & 2\sigma^2 + 2rh^2 & \frac{\sigma^2 h}{2} - rh - \sigma^2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & rh - \frac{\sigma^2 h}{2} - \sigma^2 & 2\sigma^2 + 2rh^2 \end{pmatrix}$$

und dem N-Vektor

$$b^h = \left(-\frac{1}{2h^2} \left(rh - \frac{\sigma^2 h}{2} - \sigma^2 \right) \alpha, \dots, -\frac{1}{2h^2} \left(\frac{\sigma^2 h}{2} - rh - \sigma^2 \right) \beta \right)^T.$$

Ein Differenzenverfahren ist stabil, wenn A_h eine M-Matrix ist. Die Matrix A_h ist offensichtlich unsymmetrisch und nur unter der Bedingung

$$h \leq \frac{\sigma^2}{|r - \sigma^2/2|} \quad (3.2.10)$$

diagonal dominant. In diesem Fall genügt A_h auch der Vorzeichenbedingung und ist damit eine M-Matrix. Der Fall $|r - \sigma^2/2| \gg \sigma^2$ ist kritisch, da oft die Gitterweite h aus Kapazitätsgründen nicht gemäß (3.2.10) klein genug gewählt werden kann. Die in diesem Zusammenhang auftretenden Phänomene werden als nächstes anhand eines einfachen Modellproblems diskutiert.

Modellbeispiel:

Sigulär gestörte RWA ($\epsilon \ll 1$)

$$L^\epsilon u(x) := -\epsilon u''(x) + u'(x) = 0 \quad x \in [0, 1], \quad u(0) = 1 \quad u(1) = 0.$$

Die Approximation dieses Problems mit dem obigen Differenzenverfahren zur Schrittweite $h = 1/(N + 1)$ ergibt

$$\begin{aligned} -\left(\epsilon + \frac{1}{2}h\right)u_{n-1} + 2\epsilon u_n - \left(\epsilon - \frac{1}{2}h\right)u_{n+1} &= 0, \quad 1 \leq n \leq N, \\ u_0 &= 1, \quad u_{N+1} = 0. \end{aligned}$$

Damit ist die zugehörige Systemmatrix offensichtlich diagonal dominant und von nicht-negativen Typ für $h \leq 2\epsilon$. Diese Bedingung ist aber für ein sehr kleines $\epsilon \ll 1$ in der Praxis nur schwer erfüllbar.

Für die Lösung dieser Differenzengleichungen wird einen Ansatz der Form $u_n = \lambda^n$ gemacht. Die möglichen Werte für λ sind durch die Wurzeln λ_\pm der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{2\epsilon}{\frac{1}{2}h - \epsilon} \lambda - \frac{\frac{1}{2}h + \epsilon}{\frac{1}{2}h - \epsilon} = 0$$

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

gegeben. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $u_0 = 1$ und $u_{N+1} = 0$ in dem Ansatz $u_n = c_+ \lambda_+^n + c_- \lambda_-^n$ ergeben sich die Koeffizienten durch die Beziehungen $c_+ + c_- = 1$, $c_+ \lambda_+^{N+1} + c_- \lambda_-^{N+1} = 0$. Die Lösung hat somit die Gestalt

$$u_n = \frac{\lambda_+^{N+1} \lambda_-^n - \lambda_-^{N+1} \lambda_+^n}{\lambda_+^{N+1} - \lambda_-^{N+1}}.$$

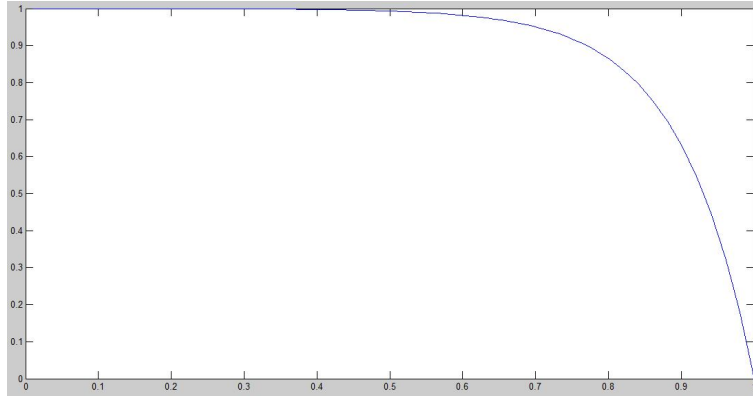


Abbildung 1: Lösung des singular gestörten Problems für $\epsilon = 0.1$ und $h = 0.01$

Für $\epsilon \ll \frac{1}{2}h$, z. B. $\epsilon = 0.0001$, $h = 0.01$ treten, wie im Beispiel der Abbildung 2 Oszillationen auf.

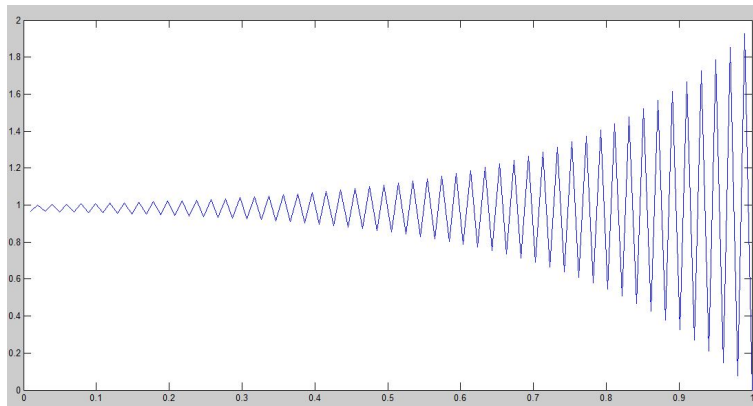


Abbildung 2: Lösung des singular gestörten Problems für $\epsilon = 0.0001$ und $h = 0.01$

Zur Unterdrückung dieses Defekts gibt es verschiedene Strategien, die im Folgenden erläutert werden.

1. Upwind-Diskretisierung

Zunächst kann der Term erster Ordnung $u'(x)$ in der Differentialgleichung statt mit dem zentralen mit einem der einseitigen Differenzenquotienten

$$\Delta_h^+ u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h}, \quad \Delta_h^- u(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h}$$

approximiert werden. Wenn der Koeffizient der ersten Ordnung $u'(x)$ positiv ist, wird der rückwärtige Differenzenquotient Δ_h^- gewählt. Damit erhält man die folgende Differenzgleichung

$$-(\epsilon + h)u_{n-1} + (2\epsilon + h)u_n - \epsilon u_{n+1} = 0.$$

Die zugehörige Matrix A_h ist dann für beliebiges $h > 0$ wieder diagonal dominant und genügt der Vorzeichenbedingung, sodass sie eine M-Matrix ist. Die Lösung hat in diesem Fall die Gestalt

$$u_n = \frac{\lambda_+^{N+1} - \lambda_+^n}{\lambda_+^{N+1} - 1}$$

mit $\lambda_+ = \frac{\epsilon + h}{\epsilon},$

wobei die kritische Wurzel λ_+ hier stets positiv ist. In diesem Fall gibt es keine ungewollte Oszillationen in der Näherungslösung für $\epsilon = 0.1$ und $h = 0.01$ (vgl. Abbildung 3).

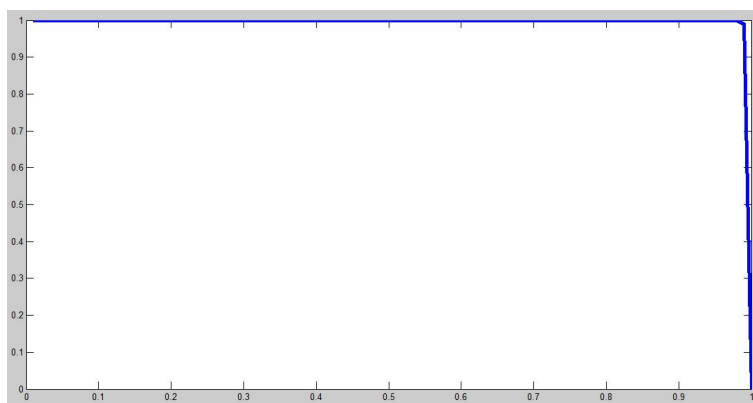


Abbildung 3: Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems für $\epsilon = 0.1$ und $h = 0.01$ mit Upwind-Diskretisierung

2. Künstliche Diffusion

Unter Beibehaltung der zentralen Diskretisierung des Terms $u'(x)$ wird der Diffusionskoeffizient ϵ auf einen größeren Wert $\hat{\epsilon} := \epsilon + \delta h$ gesetzt. Dies führt auf die Differenzgleichung

$$-(\hat{\epsilon} + h/2)u_{n-1} + 2\hat{\epsilon}u_n - (\hat{\epsilon} - h/2)u_{n+1} = 0, \quad 1 \leq n \leq N.$$

Für die zugehörige Lösung erhält man wieder durch einen Potenzansatz die Darstellung

$$u_n = \frac{\lambda_+^{N+1} - \lambda_+^n}{\lambda_+^{N+1} - 1}$$

mit $\lambda_+ = \frac{\hat{\epsilon} + h/2}{\hat{\epsilon} - h/2}$ und $\lambda_- = 1$.

Offenbar ist in diesem Fall $\lambda_+ > 0$ für $\epsilon + \delta h > h/2$, d.h. für die Wahl $\delta \geq 1/2$. Mit diesem Ansatz erhält man also ebenfalls wieder eine M-Matrix und somit eine stabile Diskretisierung. Die Lösung in diesem Fall für $\epsilon = 0.0001$, $\delta = 0.5$ und $h = 0.01$ ist in Abbildung 4 dargestellt.

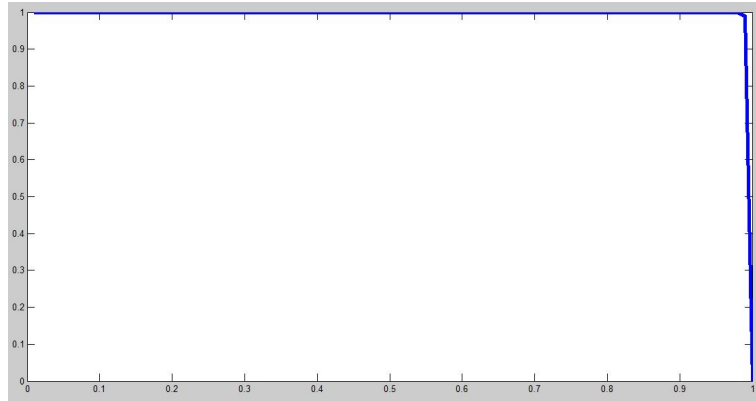


Abbildung 4: Lösung des singular gestörten Sturm-Liouville-Problems mit künstlicher Diffusion für $\epsilon = 0.0001$, $\delta = 0.5$ und $h = 0.01$

3.2.2 Upwind-Diskretisierung der instationären Black-Scholes-Gleichung

Zum Schluss wird das vorgestellte Upwind-Verfahren auf die Black-Scholes-Gleichung angewendet. Der Term der erster Ableitung $\frac{\partial V}{\partial S}$ kann in der Differentialgleichung statt mit dem zentralen mit einem der einseitigen Differenzenquotienten

$$V_S^+ = \frac{V(S + \Delta S, t) - V(S, t)}{\Delta S}, \quad V_S^- = \frac{V(S, t) - V(S - \Delta S, t)}{\Delta S}$$

approximiert werden. Bei Wahl des rückwärts gerichteten Differenzenquotienten V_S^- wird dem physikalischen Vorgang eines Informationstransports in die positive S-Richtung Rechnung getragen. Dies führt mit dem impliziten Euler Verfahren auf die Differenzgleichung

$$\frac{1}{\Delta t}(V_{i,j} - V_{i,j-1}) + \frac{\sigma^2 S^2}{2(\Delta S)^2}(V_{i+1,j-1} - 2V_{i,j-1} + V_{i-1,j-1}) + \frac{rS}{\Delta S}(V_{i,j-1} - V_{i-1,j-1}) - rV_{i,j} = 0.$$

Aufgrund der Endbedingung muss die Gleichung rückwärts gelöst werden, d.h. die Gleichung (3.3.2) muss nach V^{j-1} aufgelöst werden. Wird die Gleichung letztendlich noch umsortiert, erhält man

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma^2 S_i^2}{2(\Delta S)^2} - \frac{rS_i}{\Delta S}\right)V_{i-1,j-1} + \left(\frac{rS_i}{\Delta S} - \frac{\sigma^2 S_i^2}{(\Delta S)^2} - \frac{1}{\Delta t}\right)V_{i,j-1} \\ + \frac{\sigma^2 S_i^2}{2(\Delta S)^2}V_{i+1,j-1} = \left(r - \frac{1}{\Delta t}\right)V_{i,j}. \end{aligned}$$

Überführt man dieses erneut in Matrix-Vektor Schreibweise, ergibt sich

$$AV^{j-1} = BV^j + d^j, \quad j = 1, \dots, N$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{rS_i}{\Delta S} - \frac{\sigma^2 S_i^2}{(\Delta S)^2} - \frac{1}{\Delta t} & \frac{\sigma^2 S_i^2}{2(\Delta S)^2} & & \\ \frac{\sigma^2 S_i^2}{2(\Delta S)^2} - \frac{rS_i}{\Delta S} & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

und

$$B = \left(r - \frac{1}{\Delta t}\right)I_{N-1}.$$

Mit den zugehörigen Randbedingungen kann durch Lösen dieses Gleichungssystems der Optionspreis berechnet werden.

Fazit:

Die Upwind-Ortdiskretisierung kann bei der Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung verwendet werden, wenn der Konvektionsterm dominant und damit die Péclet-Zahl sehr groß ist, sodass ungewollte Oszillationen verhindert werden. Ob dies notwendig ist, wird in Kapitel 4 diskutiert.

Im Folgenden werden die Konsistenz- und Stabilitätsaussagen der bisher vorgestellten Finite-Differenzen Verfahren noch einmal zusammengefasst.

3.3 Konsistenz und Stabilität

In diesem Abschnitt wird die Konsistenz und Stabilität der expliziten und impliziten Euler sowie der Crank-Nicolson Methode mit zentraler Ortdiskretisierung kurz wiederholt und die Stabilitätsbedingung bei der expliziten Euler Methode genauer untersucht.

Satz 3.3 Konsistenz:

Das explizite und implizite Euler-Verfahren besitzen einen Konsistenzfehler der Ordnung

$$O(\Delta t + (\Delta S)^2),$$

falls $V(S, t) \in C^{4,2}([0, S_{max}] \times [0, T])$ gilt.

Das Crank-Nicolson Verfahren besitzt einen Konsistenzfehler der Ordnung

$$O((\Delta t)^2 + (\Delta S)^2),$$

falls $V(S, t) \in C^{4,3}([0, S_{max}] \times [0, T])$ gilt.

Satz 3.4 Stabilität:

Das explizite Euler Verfahren ist stabil, falls die folgende Bedingung erfüllt ist

$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Das implizite Euler Verfahren und das Crank-Nicolson Verfahren sind uneingeschränkt stabil.

Bemerkung:

Aus der Konsistenz und Stabilität eines numerischen Verfahrens folgt die Konvergenz des Verfahrens, d.h. die approximierte Lösung konvergiert gegen die kontinuierliche.

Im Folgenden wird der Einfluss der Stabilität beim expliziten Euler Verfahren mithilfe von Numerischer Simulation untersucht.

Aufgrund dessen wird das folgende Beispiel einer Call-Option betrachtet:

$$K = 90, t = 0, T = 1, r = 0.01, \sigma = 0.1, S = 100, S_{max} = 150.$$

Werden beispielsweise $\Delta S = 0.5$ und $\Delta t = 0.2$ gewählt, ist die Stabilitätsbedingung aus dem Satz 1.2

$$\frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} = \frac{0.2}{0.5^2} = 0.8 > 0.5$$

nicht erfüllt.

Anhand der folgenden Abbildung 5 erkennt man, dass bei Instabilität keine brauchbare Lösung berechnet wird.

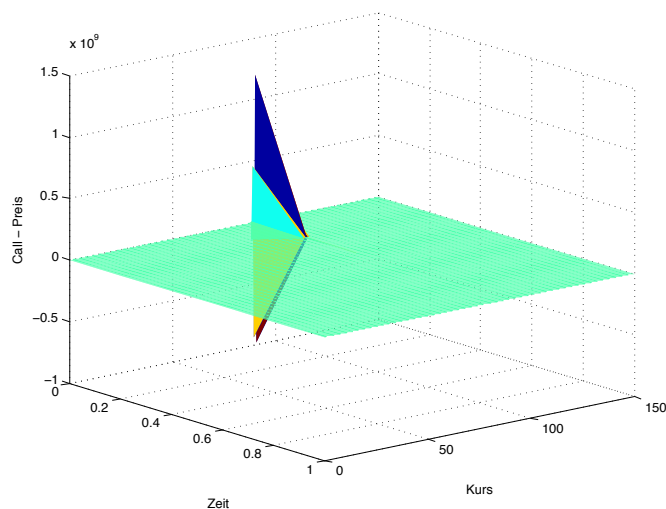


Abbildung 5: Call-Preis mit expliziter Euler Methode für $\Delta S = 0.5$ und $\Delta t = 0.2$

Werden die Werte hingegen als $\Delta S = 1.25$ und $\Delta t = 0.025$ gewählt, ist die Stabilitätsbedingung

$$\frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} = \frac{0.025}{1.25^2} = 0.016 < 0.5$$

erfüllt.

Aufgrund dessen zeigt die Abbildung 6 eine bzgl. des Aktienkurses S monoton steigende Kurve, welche den ansteigenden Call-Preis bis zum Zeitpunkt T präsentiert.

Wegen der Stabilitätseinschränkung ist die explizite Euler Methode im Gegensatz zur impliziten Euler und Crank-Nicolson Methode schlechter für die Bewertung von Optionspreisen geeignet.

3.4 Fehleranalyse

Zum Abschluss des Kapitels über Finite-Differenzen Verfahren werden die Methoden hinsichtlich ihrer Eignung für die Optionspreisberechnung analysiert, indem der Konsistenzfehler betrachtet wird.

Da der Konsistenzfehler von dem expliziten und impliziten Euler Verfahren von derselben Ordnung ist, wird im Folgenden nur der Fehler beim impliziten Euler Verfahren betrachtet.

Bei den obigen numerischen Verfahren wird das kontinuierliche Black-Scholes Problem durch ein diskretes ersetzt. Dies hat zur Folge, dass der sogenannte Diskretisierungsfehler bei der Bestimmung des Preises auftritt und im Rahmen der Konsistenzanalyse

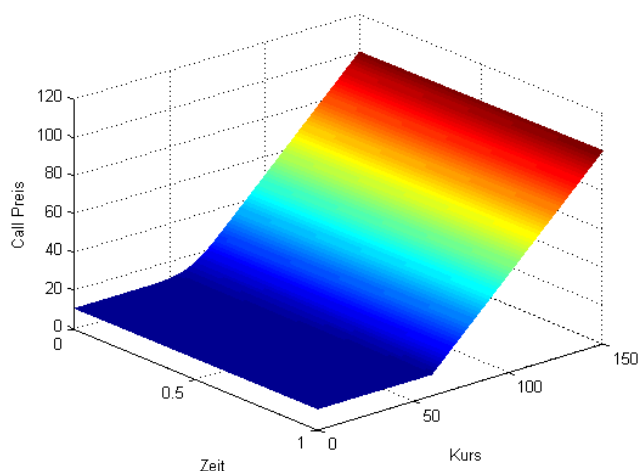


Abbildung 6: Call-Preis mit expliziter Euler Methode für $\Delta S = 1.25$ und $\Delta t = 0.025$

abgeschätzt und bewertet werden muss. Um die verschiedenen Methoden im Hinblick auf ihre Eignung untersuchen zu können, wird im Folgenden der absolute Fehler als Differenz zwischen der analytischen und der numerischen Lösung der Black-Scholes Gleichung ermittelt, welche im 2 Kapitel hergeleitet wurden.

Dazu wird das folgende Beispiel einer Call-Option betrachtet:

$$K = 90, t = 0, T = 1, r = 0.01, \sigma = 0.1, S = 100, S_{max} = 150.$$

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.004601	0.002551	0.002035	0.001906	0.001874
0.05	0.003977	0.001837	0.001300	0.001165	0.001132
0.025	0.003530	0.001344	0.000795	0.000658	0.000624
0.0125	0.003267	0.001059	0.000505	0.000366	0.000331
0.00625	0.003126	0.000906	0.000349	0.000210	0.000175

Tabelle 1: Absoluter Fehler beim impliziten Euler Verfahren

Das implizite Euler Verfahren hat eine lineare Fehlerordnung bzgl. der Zeit t und bei der Verwendung von zentralen Differenzenformulierungen für den Ort S zusätzlich eine quadratische Fehlerordnung bzgl. dem Ort S . In Tabelle 1 sind die Fehler für kleiner werdende Schrittweiten des obigen Beispiels bei Anwendung des implizite Euler Verfahrens dargestellt. Betrachtet man die Diagonale dieser Tabelle erkennt man, dass sich mit

Kapitel 3: Finite-Differenzen Verfahren

der Halbierung der Schrittweiten jeweils auch der Konsistenzfehler halbiert. Hält man dagegen nur eine Spalte fest, wird die lineare Fehlerordnung der Zeit deutlich, da die numerische Lösung langsamer konvergiert als, wenn man eine Zeile betrachtet, wo die quadratische Konvergenz deutlich wird. Für dieses Beispiel erhält man mit der feinsten Zeit- und Ortsschrittweiten, dass die numerische Lösung der analytischen auf bis zu drei Nachkommastellen entspricht.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.003389	0.001144	0.000579	0.000438	0.000403
0.05	0.003082	0.000849	0.000288	0.000148	0.000113
0.025	0.003004	0.000772	0.000212	0.000072	0.000037
0.0125	0.002984	0.000753	0.000193	0.000053	0.000018
0.00625	0.002979	0.000748	0.000188	0.000048	0.000013

Tabelle 2: Absoluter Fehler beim Crank-Nicolson Verfahren

Bei dem Crank-Nicolson Verfahren erhält man aufgrund dessen das bzgl. der Zeit auch ein zentraler Differenzenquotient verwenden wird, eine quadratische Fehlerordnung bzgl. des Ortes S und der Zeit t . Dies verdeutlicht die Tabelle 2, wo der Fehler beim Crank-Nicolson Verfahren im Vergleich zu dem Fehler beim impliziten Euler in Tabelle 1 schneller sinkt. Wird hier die Diagonale betrachtet, wird deutlich, dass sich bei einer Halbierung der Schrittweiten der Fehler jeweils um fast ein Viertel in diesem Beispiel verkleinert. Bei der feinsten Orts- und Zeitschrittweite gleicht die numerische Lösung der analytischen bis auf vier Nachkommastellen genau.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.226428	0.196854	0.182441	0.175328	0.171795
0.05	0.143776	0.114018	0.099508	0.092343	0.088785
0.025	0.102422	0.072572	0.058012	0.050822	0.047250
0.0125	0.081748	0.051851	0.037266	0.030064	0.026486
0.00625	0.071413	0.041493	0.026895	0.019687	0.016106

Tabelle 3: Absoluter Fehler beim Upwind-Verfahren mit impliziter Euler Zeitdiskretisierung

In Tabelle 3 wird der absolute Fehler des Upwind-Verfahren mit impliziter Euler Zeitdiskretisierung dargestellt, wobei einen Konsistenzfehler linearer Ordnung bzgl. der Zeit

t und dem Ort S auftritt. Diese geringere Fehlerordnung wird direkt deutlich, da bei diesem Verfahren die numerische Lösung der analytischen lediglich auf eine Nachkommastelle genau gleicht.

Außerdem sinkt der absolute Fehler hierbei maximal um die Hälfte, wenn die Schrittweiten halbiert werden. Anhand der Tabelle 3 kann man sehen, dass das Upwind-Verfahren im Vergleich zu den Verfahren mit zentralen Differenzenquotienten für die Berechnung der Optionspreise aufgrund der linearen Konsistenzfehlerordnung schlechter geeignet ist.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.016111	0.007517	0.003768	0.002033	0.001200
0.05	0.015800	0.007220	0.003476	0.001742	0.000910
0.025	0.015721	0.007143	0.003399	0.001666	0.000834
0.0125	0.015701	0.007124	0.003380	0.001647	0.000815
0.00625	0.015696	0.007119	0.003375	0.001642	0.000810

Tabelle 4: Absoluter Fehler beim Upwind-Verfahren mit Crank-Nicolson Zeitdiskretisierung

Der Konsistenzfehler des Upwind-Verfahrens mit Crank-Nicolson Zeitdiskretisierung wird in Tabelle 4 dargestellt. Im Gegensatz zum vorherigen Verfahren besitzt dieses Verfahren zumindest bzgl. der Zeit eine quadratische Fehlerordnung. Während man aufgrund des einseitigen Differenzenquotienten für den Ort nur eine lineare Fehlerordnung hat. Betrachtet man die Diagonale der Tabelle 4 wird deutlich, dass bei einer Halbierung der Schrittweiten der Fehler sich jeweils mehr als halbiert. Darüber hinaus liefert dieses Verfahren, wie zu erwarten war, genauere Ergebnisse als das Upwind-Verfahren mit impliziten Euler Zeitdiskretisierung in Tabelle 3. Allerdings ist dieses Verfahren im Vergleich mit der Crank-Nicolson Diskretisierung in Tabelle 2 schlechter und die numerische Lösung entspricht der analytischen bei den kleinsten Schrittweiten auf drei Nachkommastellen genau.

Auffallend ist bei diesem Verfahren, dass die Verfeinerung der Zeitschrittweite nur eine geringere Auswirkung auf den absoluten Fehler hat.

3.5 Zwischenfazit

Vergleicht man die absoluten Fehler der verschiedenen Verfahren miteinander, erhält man die folgenden Resultate:

Das Crank-Nicolson Verfahren ist dem impliziten Euler vorzuziehen, da in beiden Fällen zwar Gleichungssysteme gelöst werden müssen, aber die Konsistenzordnung des Crank-Nicolson Verfahrens bei gleichem Rechenaufwand größer als das der impliziten Methode

ist. Aufgrund dessen konvergiert das Crank-Nicolson Verfahren schneller. Die Verfeinerung der Zeitschrittweite hat, wie erwartet, einen geringeren Einfluss auf die Genauigkeit als die Verfeinerung der Ortsschrittweite. Allgemein liefern die Verfahren, welche zentrale Differenzenquotienten verwenden, aufgrund der quadratische Konsistenzfehlerordnung bessere Ergebnisse.

4 Notwendigkeit einer Transformation

Die partielle Differentialgleichung der Black-Scholes-Gleichung kann zwar direkt mit den Finite-Differenzen Verfahren gelöst werden, allerdings wird diese in vielen Anwendungen zunächst auf die Wärmeleitungsgleichung transformiert und dann erst numerisch gelöst.

Dies liegt zum einen an der Péclet-Zahl, welche das Verhältnis vom Konvektionskoeffizienten zum Diffusionskoeffizienten bei einer parabolischen Differentialgleichung skaliert mit einem Faktor beschreibt. Je größer die Péclet-Zahl ist, umso größer ist die Gefahr von numerischen Oszillationen.

Für die Black-Scholes-Gleichung gilt:

$$\text{Péclet-Zahl} = \Delta S \frac{rS}{\frac{\sigma^2}{2} S^2} = \frac{2r}{\sigma^2} \frac{\Delta S}{S}.$$

Kleine Volatilitäten $\sigma \approx 0$ führen bei der Black-Scholes-Gleichung zu einer großen Péclet-Zahl, sodass bei der Lösung der Gleichung mithilfe Finite-Differenzen Verfahren Instabilitäten berücksichtigt werden müssen.

Diesen Instabilitäten kann durch eine kleinere Schrittweite ΔS und einen risikolosen Zinssatz $r \approx 0$ entgegen gewirkt werden.

Im weiteren Verlauf wird zuerst die Transformation der Black-Scholes-Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung erläutert und im Anschluss der Einfluss der Volatilität auf die Transformation analysiert. Zum Schluss wird die Gefahr von Oszillationen in der Praxis diskutiert.

4.1 Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung

In diesem Kapitel wird die Transformation der Black-Scholes-Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung kurz diskutiert und erläutert.

Satz 4.1 Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung

Die Variablen t und S werden transformiert durch:

$$t := T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \quad S := Ke^x,$$

Mit $q := \frac{2r}{\sigma^2}$ ist Funktion $f(x, \tau)$ festgelegt durch die folgenden Bedingungen:

$$V(S, t) = V(Ke^x, T - \frac{2\tau}{\sigma^2}) =: v(x, \tau),$$

$$v(x, \tau) = K \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2}(q-1)x - \left(\frac{1}{4}(q-1)^2 + q \right) \tau \right) \right\} f(x, \tau).$$

Für f erhält man die parabolische Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Dies ist die bekannte Wärmeleitungsgleichung bei der die Péclet-Zahl = 0 ist, sodass keine Instabilitäten zu befürchten sind.

Aufgrund der vorgenommenen Zeittransformation wird die Endbedingungen für $\tau = 0$ zu einer Anfangsbedingung

$$\text{Call: } f(x, 0) = \max \left\{ e^{\frac{x}{2}(q+1)} - e^{\frac{x}{2}(q-1)}, 0 \right\},$$

$$\text{Put: } f(x, 0) = \max \left\{ e^{\frac{x}{2}(q-1)} - e^{\frac{x}{2}(q+1)}, 0 \right\},$$

wobei für die Parameter die folgenden Bedingungen gelten müssen:

$$-\infty < x < \infty,$$

$$0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}\sigma^2 T := \tau_{max}.$$

Für die Diskretisierung muss der Streifen in der (x, τ) -Ebene durch passend gewählte Werte für x_{min} und x_{max} begrenzt und die Randbedingungen müssen transformiert werden.

4.2 Einfluss der Volatilität

Im Folgenden wird der Einfluss von kleinen Volatilitäten auf die Lösung der Black-Scholes-Gleichung anhand zweier Beispiele erläutert.

Kapitel 4: Notwendigkeit einer Transformation

Für das erste Beispiel wird eine Call-Option mit den Werten

$$S = 100, K = 90, S_{max} = 150, T = 1, t = 0 \text{ und } r = 0.01$$

in Abhängigkeit der Volatilität betrachtet. Die Lösung der nicht transformierten Black-Scholes-Gleichung für diese Call-Option mit dem Crank-Nicolson Verfahren für verschiedene Schrittweiten wird zusammen mit der analytischen Lösung dieser Call-Option in Abbildung 7 dargestellt.

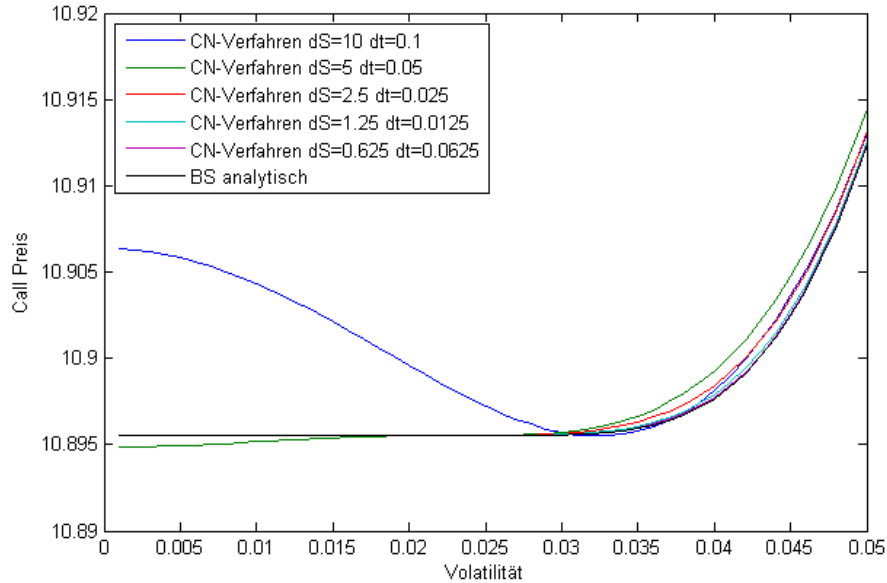


Abbildung 7: Analytische Lösung (schwarz) und Lösung der nicht transformierten Black-Scholes-Gleichung mit dem Crank-Nicolson Verfahren in Abhängigkeit der Volatilität σ für eine Call-Option mit $S = 100$, $K = 90$, $S_{max} = 150$, $T = 1$, $t = 0$ und $r = 0.01$.

In Abbildung 7 weichen die Lösungen der Black-Scholes-Gleichung bei großen Schrittweiten (blaue und grüne Kurven) gerade für kleine Volatilitäten $\sigma < 0.03$ stark von der analytischen Lösung ab.

Aber für Ortsschrittweiten von $dS < 2.5$ und Zeitschrittweiten von $dt < 0.025$ wird die analytische Lösung für kleine Volatilitäten gut durch das Crank-Nicolson Verfahren im Rahmen der nicht- transformierten Black-Scholes-Gleichung approximiert.

Bei dem zweiten Beispiel wird eine Call-Option betrachtet, bei welcher der Aktienkurs dem Ausübungspreis gleich gesetzt wird und im Unterschied zum ersten Beispiel unter anderem ein höherer risikoloser Zinssatz angenommen wird.

$$S = K = 100, S_{max} = 200, T = 1, t = 0 \text{ und } r = 0.1.$$

Kapitel 4: Notwendigkeit einer Transformation

In der Abbildung 8 wird die Lösung des Crank-Nicolson Verfahrens im Zusammenhang mit der nicht-transformierten Black-Scholes-Gleichung zusammen mit der analytischen Lösung für die Call-Option dargestellt.

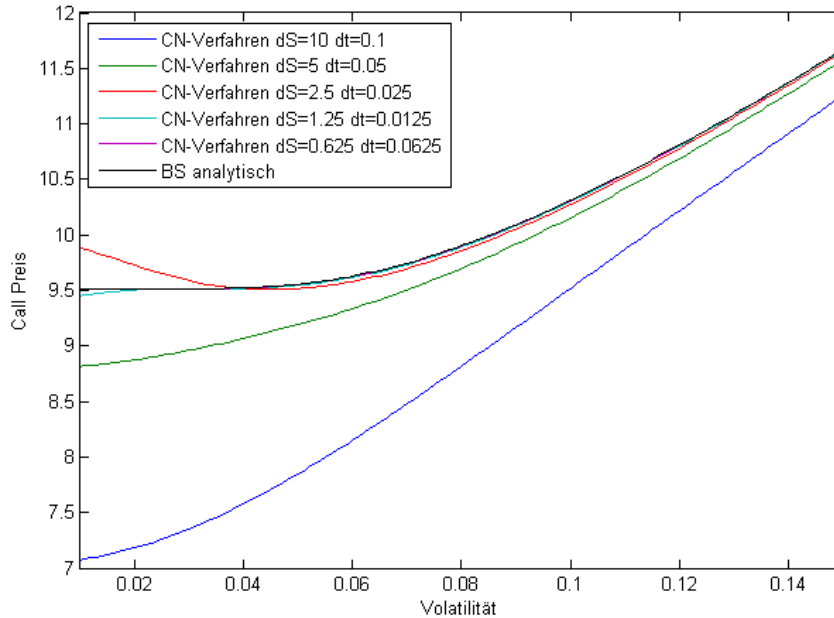


Abbildung 8: Nicht transformierte Lösung der Black-Scholes-Gleichung mit dem Crank-Nicolson Verfahren in Abhängigkeit der Volatilität σ für eine Call-Option mit $S = K = 100$, $S_{max} = 200$, $T = 1$, $t = 0$ und $r = 0.1$.

Aus der Abbildung 8 kann man schließen, dass die Lösungen des Crank-Nicolson Verfahrens schon für größere Volatilitäten von der analytischen Lösung abweichen als dies der Fall in Abbildung 7 ist.

Erst bei einer kleinen Schrittweite von $dS = 0.625$ und $dt = 0.0625$ erhält man eine gute Approximation des Call-Preises zum Zeitpunkt $t = 0$. Im zweiten Beispiel schwanken die Lösungen der nicht transformierten Black-Scholes-Gleichung für kleine Volatilitäten und verschiedene Schrittweiten um die analytische Lösung stärker als im Beispiel 1.

Um die Notwendigkeit einer Transformation beurteilen zu können, wird in der Abbildung 9 die Lösung des Crank-Nicolson Verfahrens im Rahmen der transformierten Black-Scholes-Gleichung für diese Call-Option dargestellt.

In Abbildung 9 erkennt man, dass die Lösung der Black-Scholes-Gleichung mit Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung gerade bei kleinen Volatilitäten $\sigma < 0.04$ eine gute Approximation des Call-Preises zum Zeitpunkt $t = 0$ liefert.

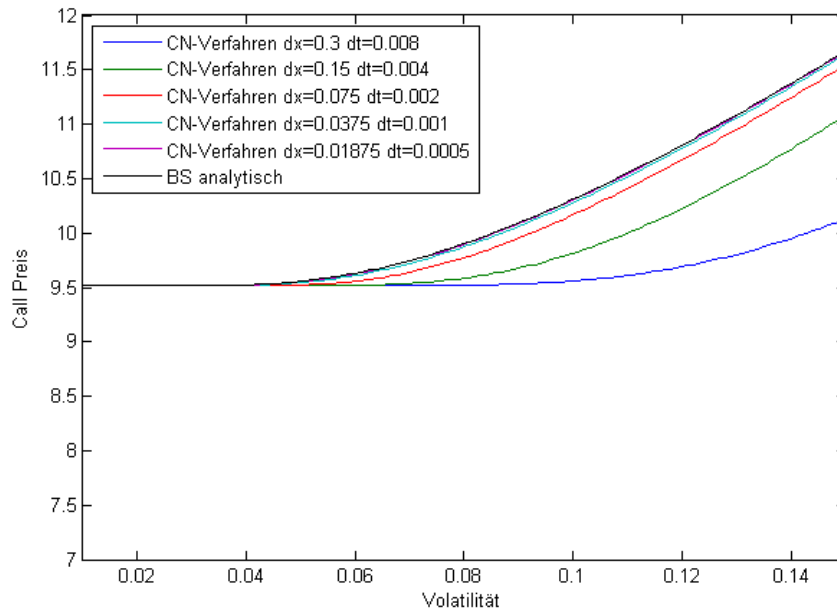


Abbildung 9: Lösung der transformierten Black-Scholes-Gleichung mit dem Crank-Nicolson Verfahren in Abhängigkeit der Volatilität σ für eine Call-Option mit $S = K = 100$, $T = 1$ und $r = 0.1$.

Bei größeren Volatilitäten erhält man durch die Anwendung der transformierten Black-Scholes-Gleichung eine gute Approximation des Preises unter der Voraussetzung von kleineren Schrittweiten.

Die Beispiele der verschiedenen Call-Optionen zeigen, dass bei der nicht-transformierten Black-Scholes-Gleichung die Lösungen für kleine Volatilitäten zum Teil stark von der analytischen Lösung abweichen. Allerdings erhält man durch die Wahl von kleineren Schrittweiten auch für kleine Volatilitäten eine gute Approximationen des Optionspreises. Transformiert man die Black-Scholes-Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung erhält man unabhängig von der Höhe der Volatilität gute Approximationen des Optionspreises.

4.3 Zwischenfazit

Um Instabilitäten bei der Lösung ausschließen zu können, sollte zur Optionspreisberechnung die Black-Scholes-Gleichung in einem ersten Schritt auf die Wärmeleitungsgleichung transformiert werden. In einem zweiten Schritt sollte die Gleichung mit Finite-Differenzen Verfahren gelöst und die Lösung schließlich zurück transformiert werden.

Allerdings kann die Black-Scholes-Gleichung nicht bei allen Optionstypen auf die Wärmeleitungsgleichung transformiert werden. Dies kann beispielsweise nicht geschehen, wenn

die Option von mehreren Aktienkursen abhängt. In diesem Fall müssen die Finite-Differenzen Verfahren direkt auf die Black-Scholes-Gleichung angewendet werden.

Dabei stellt sich weiterhin die Frage, ob die Péclet-Zahl in der Praxis so groß werden kann, dass Oszillationen auftreten würden.

Im ersten Beispiel mit $S = 100$ und einer Schrittweite von $\Delta S = 10$ muss für eine Péclet-Zahl, die größer als eins sein soll, die Ungleichung

$$r > 5\sigma^2$$

für den risikolosen Zinssatz und die Volatilität erfüllt sein.

Für den risikolosen Zinssatz kann als Referenzzinssatz der 12-Monats EURIBOR (Euro InterBank Offered Rate) angenommen werden, dessen historischer Verlauf in der Abbildung 10 dargestellt ist.

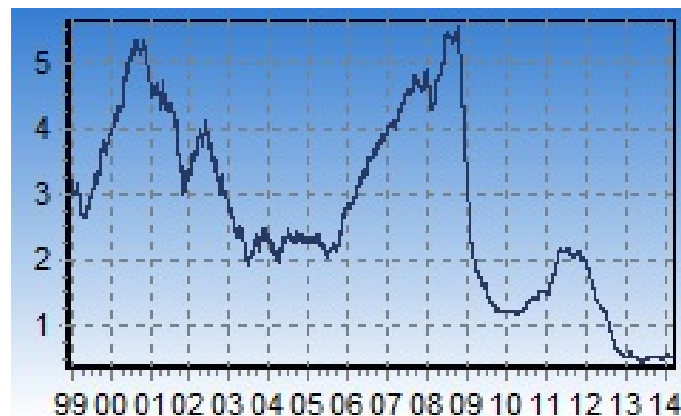


Abbildung 10: Historische Kurse des 12-Monats EURIBOR in Prozent⁴

Den höchsten Wert, den der EURIBOR in seinem bisherigen Verlauf angenommen hat, liegt bei 0.05.

In diesem Fall könnten für Aktienkurse mit einer Volatilität von $\sigma < 0.01$ Instabilitäten bei der Optionspreisberechnung mit den Finite-Differenzen Verfahren aufgrund einer hohen Péclet-Zahl auftreten. Da im Allgemeinen der Kurs des 12-Monats EURIBOR deutlich niedriger ist, kann davon ausgegangen werden, dass im Regelfall keine Instabilitäten auftreten werden. Ausnahmen bilden dabei solche Aktien, deren Kurse sich nicht viel verändern und somit eine sehr kleine Standardabweichung und daraus folgend eine geringe Volatilität aufweisen. Allerdings ist es ziemlich unwahrscheinlich, dass auf solchen Aktien überhaupt Optionen gehandelt werden.

⁴Entnommen von: de.euribor-rates.eu

5 Löser

In diesem Kapitel werden verschiedene Löser - das Jacobi-, SOR-, GMRES-Verfahren und LR-Zerlegung - genauer erläutert und ihre Schnelligkeit analysiert. Für die Ermittlung des Optionspreises ist es essentiell, dass das lineare Gleichungssystem effizient gelöst werden kann, da in der Praxis oftmals nicht nur eine, sondern mehrere Optionen zeitgleich bewertet werden müssen.

Durch Anwendung der ersten drei Löser wird in jedem Zeitschritt Δt ein Gleichungssystem gelöst. Bei der LR-Zerlegung wird die zu lösende Matrix hingegen einmal zerlegt und die Berechnung der Lösung erfolgt in jedem Zeitschritt durch Vorwärts- / Rückwärtseinsetzen.

5.1 Jacobi-Verfahren

Das Jacobi-Verfahren löst das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der regulären Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ iterativ. Eine grundlegende Voraussetzung ist, dass die Diagonalelemente der Matrix A $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, \dots, n$ sind, sodass die Diagonalmatrix $D = \text{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$ regulär ist.

Das Gleichungssystem $Ax = b$ kann in eine äquivalente Form umgeschrieben werden:

$$x = D^{-1}(D - A)x + D^{-1}b.$$

Definiere als lineares Iterationsverfahren das Folgende:

$$x_{m+1} = D^{-1}(D - A)x_m + D^{-1}b \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

Beim Jacobi-Verfahren wird die neue Iterierte x_{m+1} ausschließlich durch Verwendung der vorangegangenen Iterierten x_m ermittelt. Die Konvergenz des Jacobi-Verfahrens hängt lediglich vom Spektralradius der Iterationsmatrix $D^{-1}(D - A)$ ab. Die Konvergenz des Verfahrens kann durch die Größe der Matrixkoeffizienten überprüft werden, da sich der Spektralradius durch jede Matrixnorm abschätzen lässt.

Dazu betrachtet man den folgenden Satz:

Satz 5.1

Erfüllt die reguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $a_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$ das starke Zeilensummenkriterium

$$q_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{|a_{ik}|}{|a_{ii}|} < 1,$$

dann konvergiert das Jacobi-Verfahren bei beliebigem Startvektor $x_0 \in \mathbb{C}^n$ und für beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{C}^n$ gegen $A^{-1}b$.

Im Folgenden wird ein äquivalenter Satz bezüglich der Konvergenz mit anderen Voraussetzungen formuliert.

Satz 5.2

Sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ regulär, irreduzibel und diagonaldominant, dann gilt:

$$\max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \leq 1$$

und es existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} < 1.$$

Unter diesen Voraussetzungen konvergiert dann das Jacobi-Verfahren bei beliebigem Startvektor $x_0 \in \mathbb{C}^n$ und für beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{C}^n$ gegen $A^{-1}b$.

Allgemein lässt sich der Aufwand des Jacobiverfahrens wie folgt charakterisieren: Zur Reduzierung des Anfangsfehler durch das Jacobiverfahren um den Faktor $\epsilon \ll 1$ sind, in etwa $T_J \sim \frac{2}{\pi^2} n \cdot \ln(\frac{1}{\epsilon})$ Iterationsschritte nötig.⁵

Nach der theoretischen Einführung werden im Folgenden die Ergebnisse einer numerischen Simulation generiert. Die Annahmen für die Rahmenbedingungen der Simulation sind, wie oben bereits erwähnt, die Folgenden:

$$K = 90, T = 1, r = 0.01, \sigma = 0.1, S = 100 \text{ und } t = 0.$$

Zuerst wird die für die Berechnung der Optionspreise benötigte Gesamtzeit in Sekunden für die unterschiedlichen Orts- und Zeitschritte in der Tabelle 5 dargestellt. Als Abbruchkriterium ist die relative Fehlerschranke von 10^{-5} gewählt worden.

Im Folgenden wird die maximale Iterationszahl für den jeweiligen Ortsschritt in Form einer Tabelle (Tabelle 6) abgebildet.

Bei jeder Halbierung der Ortsschrittweite steigt sowohl der Zeitaufwand als auch die maximale Iterationszahl bei dem Jacobi-Verfahren an.

Bei jeder Halbierung der Zeitschrittweite steigt der Zeitaufwand nicht groß an und sinkt sogar bei kleineren Ortsschrittweiten. Die maximale Iterationszahl sinkt bei der Halbierung der Zeitschrittweite kontinuierlich.

⁵Vgl. Skript zur Einführung in die Numerische Mathematik.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625
0.1	2.5967	19.9076	183.8928	2143.7205
0.05	3.5235	23.3711	177.0892	1573.9567
0.025	3.1134	21.8596	157.3772	1276.8727
0.0125	3.8169	20.1382	150.1450	1276.8727
0.00625	4.2485	19.3173	120.6293	938.6045

Tabelle 5: Gesamtzeit in Sekunden beim Jacobi-Verfahren

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625
0.1	32	118	461	1833
0.05	16	54	209	827
0.025	8	26	95	373
0.0125	5	13	44	167
0.00625	3	6	20	75

Tabelle 6: Maximale Iterationszahl beim Jacobi-Verfahren

5.2 SOR-Verfahren

Das zweite Verfahren, das im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachtet wird, ist das SOR-Verfahren. Dieses Verfahren gehört ebenso zu den Splitting-Methoden. Man definiere das lineare Iterationsverfahren als

$$x_{m+1} = (D + \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D - \omega R]x_m + \omega(D + \omega L)^{-1}b,$$

wobei D die Diagonalmatrix, L die strikte linke untere Dreiecksmatrix von A und R die strikte obere Dreiecksmatrix von A ist. Für die Reduzierung des Anfangsfehler durch das SOR-Verfahren um den Faktor $\epsilon \ll 1$ sind etwa $T_J \sim \frac{1}{2\pi} \sqrt{n} \cdot \ln(\frac{1}{\epsilon})$ Iterationsschritte nötig.⁶ Für $\omega = 1$ ergibt sich das bereits bekannte Gauß-Seidel-Verfahren.

Für die numerische Simulation wird neben den Voraussetzungen aus Kapitel 5.1 $\omega = 1.3$ gesetzt. Zuerst wird erneut die unter Anwendung des SOR-Verfahrens zur Berechnung der Optionspreise benötigte Gesamtzeit in Sekunden in der Tabelle 7 dargestellt.

⁶Vgl. Skript zur Einführung in die Numerische Mathematik.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625
0.1	0.2318	1.6246	30.5576	486.3433
0.05	0.1216	1.5261	27.3361	425.6746
0.025	0.1678	1.4599	24.4104	362.2677
0.0125	0.3184	1.5064	21.8134	303.2318
0.00625	0.4292	1.9595	19.1888	248.8549

Tabelle 7: Gesamtzeit in Sekunden beim SOR-Verfahren

Die nächste Tabelle 8 zeigt die maximale Iterationszahl jedes Ortsschrittes auf.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625
0.1	11	29	114	456
0.05	9	14	52	204
0.025	7	9	24	92
0.0125	5	7	12	42
0.00625	4	6	8	19

Tabelle 8: Maximale Iterationszahl beim SOR-Verfahren

Die benötigte Zeit und die Anzahl der Iterationsschritte beim SOR-Verfahren werden mit jeder Halbierung der Ortsschrittweite größer.

Halbiert man hingegen die Zeitschrittweite, nimmt der Zeitaufwand entweder ab oder bleibt nahezu konstant.

Die maximale Iterationszahl nimmt bei Halbierung der Zeitschrittweite weiter ab.

5.3 GMRES-Verfahren

Das dritte im Rahmen der vorliegenden Arbeit betrachtete Verfahren ist das sogenannte GMRES-Verfahren.

Das GMRES-Verfahren, das 1986 von Saad und Schultz vorgestellt wurde, ist für beliebige reguläre Matrizen geeignet. Es stellt ein iteratives und direktes Verfahren dar, wobei die direkte Form aufgrund des benötigten Speicherplatzes nicht angewendet werden kann. Aufgrund dessen wird der Algorithmus in der Praxis in einer Restarted-Version benutzt. Dieses Verfahren kann mit zwei verschiedenen Ansätzen betrachtet werden - einerseits über den Krylov-Unterraum und andererseits als ein Minimierungsproblem, das sich durch die Umformulierung des linearen Gleichungssystems ergibt. Zum Aufwand des GMRES - Verfahrens lässt sich sagen, dass der Aufwand hauptsächlich durch den Arnoldi

- Prozess entsteht. Bei einer dünnbesetzten Matrix, wie in unserem Beispiel, werden die Kosten der Matrix - Vektor - Multiplikation mit $O(n)$ angesetzt. Es ergibt sich somit ein Gesamtaufwand von $\frac{k^2n}{2} + O(kn)$ Multiplikationen für die ersten k Iterationen.⁷

In der Tabelle 9 wird zunächst der Zeitaufwand betrachtet, bevor die Tabelle 10 erneut auf die maximale Iterationszahl eingeht.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.0670	0.1484	0.4078	1.5321	7.3401
0.05	0.0869	0.1323	0.3943	1.2600	5.3606
0.025	0.1211	0.1797	0.4041	1.4489	5.1156
0.0125	0.3207	0.5175	0.6095	2.0571	7.1820
0.00625	0.5693	0.8401	1.5051	3.7506	12.6846

Tabelle 9: Gesamtzeit in Sekunden beim GMRES-Verfahren

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	13	25	50	99	196
0.05	9	17	32	63	126
0.025	6	11	21	41	81
0.0125	5	8	14	27	52
0.00625	3	5	9	17	33

Tabelle 10: Maximale Iterationszahl beim GMRES-Verfahren

Der Zeitaufwand des GMRES-Verfahrens steigt bei der Halbierung der Ortsschrittweite an und der Zeitaufwand steigt bei der Halbierung der Zeitschrittweite an. Die maximale Iterationszahl steigt bei der Halbierung der Ortsschrittweite und sinkt bei der Halbierung der Zeitschrittweite.

5.4 LR-Zerlegung

Das letzte hier betrachtete Verfahren ist die LR -Zerlegung. Bei diesem Verfahren wird die Matrix für jeden Ortsschritt einmal in eine untere Dreiecksmatrix und eine obere Dreiecksmatrix zerlegt. Für jeden einzelnen Zeitschritt kann die Lösung durch Rückwärtseinsetzen sehr effizient generiert werden. Allerdings beträgt der Aufwand für eine

⁷Vgl. Hanke-Bourgeois, 2009.

einzelne Zerlegung im Allgemeinen $O(\frac{n^3}{3})$. Für den Spezialfall, dass es sich um eine Tridiagonalmatrix handelt, sinkt der Aufwand auf $O(n)$.⁸

Als nächstes wird die Gesamtzeit in Sekunden der Berechnung der Optionspreise für die unterschiedlichen Orts- und Zeitschritte in Tabelle 11 dargestellt.

$\Delta t \backslash \Delta S$	1.25	0.625	0.3125	0.15625	0.078125
0.1	0.0256	0.0133	0.0350	0.1630	0.4314
0.05	0.0101	0.0139	0.0345	0.1408	0.4966
0.025	0.0109	0.0157	0.0371	0.1815	0.6438
0.0125	0.0131	0.0179	0.0407	0.2448	0.9734
0.00625	0.0173	0.0234	0.0607	0.4452	1.4763

Tabelle 11: Gesamtzeit in Sekunden bei der LR-Zerlegung

Der Zeitaufwand bei der LR-Zerlegung steigt bei der Halbierung der Ortsschrittweite an. Bei der Halbierung der Zeitschrittweite bleibt der Zeitaufwand bei größeren Ortsschrittweiten nahezu konstant, bevor er bei kleineren Schrittweite dann steigt.

5.5 Zwischenfazit

Zum Abschluss des Kapitels über die Löser werden die obigen Resultate miteinander verglichen und ein Fazit gezogen.

Im Allgemeinen ist der Aufwand des LR-Verfahren mit $O(\frac{n^3}{3})$ sehr groß und es wird bei vollbesetzten Matrizen auf iterativer Löser zurück gegriffen. Zuerst wurde das Jacobi-Verfahren untersucht. Damit dieses Verfahren konvergiert müssen die Voraussetzungen, die in Satz 5.1 und 5.2 formuliert worden sind, erfüllt sein, das heißt, dass dieses Verfahren nicht konvergieren muss. Das Jacobi-Verfahren benötigt, wie oben beschrieben, im Allgemeinen mehr Iterationsschritte als das SOR-Verfahren. Damit ist das SOR-Verfahren für ω_{opt} von den beiden Verfahren das geeignetere.

In dem oben diskutierten Problem sind allerdings Tridiagonalmatrizen zu lösen. Bei diesen nimmt der Aufwand des LR - Verfahrens stark ab und ist mit $O(n)$ besser als das GMRES- Verfahren bei dünnbesetzten Matrizen. Das GMRES-Verfahren besitzt einem Aufwand von $\frac{k^2n}{2} + O(kn)$ Multiplikationen für die ersten k Iterationen.

Das Jacobi-Verfahren ist, wie oben gesehen, das Verfahren, dass von den vieren am längsten für die Berechnung der Optionspreise benötigt. Aufgrund dessen ist es im Vergleich zu den anderen das ungeeignetste Verfahren.

⁸siehe Skript zur Einführung in die Numerische Mathematik

Das SOR-Verfahren benötigt in jedem Orts- und Zeitschritt weniger Zeit für die Berechnung des Optionspreises als das Jacobi-Verfahren. Somit ist das SOR-Verfahren zwar besser geeignet als das Jacobi-Verfahren, aber das GMRES-Verfahren hat im Vergleich zu dem Jacobi und dem SOR-Verfahren einen äußerst geringen Zeitaufwand und ist infolgedessen für eine schnelle Optionspreisberechnung gut geeignet.

In diesem Beispiel ist die LR-Zerlegung das geeignetste Verfahren. Hierbei wird die Matrix nur einmal in jedem Ortsschritt zerlegt und in jedem Zeitschritt das lineare Gleichungssystem durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen effektiv gelöst.

Das LR-Verfahren benötigt bei der Berechnung des Optionspreises somit am wenigsten Zeit und ist daher für die Berechnung des Preises das geeignetste der vier vorgestellten Verfahren.

6 Praktische Anwendung

In diesem Kapitel werden die theoretischen Ausführungen auf das Beispiel der BVB-Aktie angewendet und diskutiert.

Die zentrale Fragestellung mit der sich dieses Kapitel beschäftigt, besteht darin, ob ein Investor in der derzeitigen Situation eine Put Option auf die BVB Aktie erwerben sollte. Zur Beantwortung dieser Frage werden in diesem Kapitel reale Daten untersucht. Allerdings muss in einem ersten Schritt betrachtet werden, in welchem Maße die realen Daten die Modellvoraussetzungen erfüllen.

6.1 Prüfung der Modellvoraussetzung

Die erste Voraussetzung des Modells lautet, dass ein konstanter risikoloser Zinssatz $r \geq 0$ existieren muss. Diese Voraussetzung ist nicht erfüllt, da ein risikoloser Zinssatz am Markt nicht existiert. Man wählt für einen solchen Zinssatz aber unter anderem den 12 - Monats EURIBOR, der allerdings nicht konstant und auch nicht risikolos ist. Er lag am 20.02.2014 bei $r = 0.000545 \geq 0$.

Die zweite Voraussetzung besteht darin, dass keine Dividendenzahlung auf den Aktienkurs gezahlt werden. Auf die BVB-Aktie wurde im Jahr 2013 eine Dividende von 0.1 € gezahlt. Daraus folgt, dass diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Allerdings kann das Black-Scholes-Modell um die Dividendenzahlungen erweitert werden.

Ein arbitragefreier, liquider und fraktionsloser Markt ist die dritte Modellvoraussetzung. Dies ist nicht gegeben, da in der Realität Steuern auf Kapitalerträge abgeführt werden müssen und es bei Banken beispielsweise Gebühren auf Finanzgeschäfte gibt.

Die vierte Voraussetzung ist, dass Aktienkurse kontinuierlich gehandelt werden können und das Aktien beliebig teilbar sind. Diese Voraussetzung ist grundsätzlich nicht gege-

ben, weil Aktienkurse nur an etwa 250 Handelstagen im Jahr gehandelt werden können.

Die fünfte Voraussetzung lautet, dass ungedeckte Leerverkäufe erlaubt sind. Diese Voraussetzung ist ebenfalls nicht erfüllt, da diese im Zuge der Finanzkrise am 27. Juli 2010 in Deutschland verboten worden sind.

Die letzte Voraussetzung des Modells besteht darin, dass die Aktienkurse durch stetige Prozesse modelliert werden können. Diese Voraussetzung ist einerseits in der Realität grundsätzlich nicht erfüllt, da es im Zuge von Börsencrashes zu unstetigen Verläufen von Aktienkursen kommen kann. Andererseits wird an der Börse an den Wochenende auch nicht gehandelt.

6.2 Volatilität

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Möglichkeiten zur Berechnung der Volatilität erläutert, da eine möglichst gute Schätzung für ein geeignetes Modell notwendig ist. Die Volatilität beschreibt die durchschnittliche Kursschwankung des Basiswerts (Akte). Die Idee hinter der Berechnung besteht darin, dass die Volatilität durch die historischen Kursschwankungen berechnet werden kann. Dies wird dann als historische Volatilität bezeichnet.

Als erstes wird die Definition der historischen Volatilität genannt.

Lemma 6.1 *Historische Volatilität*

Unter der historischen Volatilität wird die annualisierte Standardabweichung der logarithmischen Kursänderung verstanden.

Seien die Aktienkurse S_i gegeben und definiere

$$y_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$
$$\bar{y} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} y_i.$$

Die historische Volatilität σ_{hist} ist dann durch die folgende Gleichung definiert:

$$\sigma_{hist} = \sqrt{N} \left(\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - \bar{y})^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

wobei N die durchschnittliche Anzahl der Börsentage in einem Jahr ist.

Die historische Volatilität kann auch anders berechnet werden, indem beispielsweise die jüngeren Kurswerte stärker gewichtet werden. Darüber hinaus kann mit gleitenden Durchschnitten, die exponentiell gewichtet werden, gearbeitet werden.

6.3 Beispiel der BVB-Aktie

Die theoretischen Resultate der vorherigen Kapitel werden in diesem Kapitel auf das praktische Beispiel der BVB-Aktie angewandt. Zunächst werden dafür die grundlegenden Kennzahlen der BVB-Aktie dargestellt, bevor im weiteren Verlauf dieses Kapitels sowohl der Preis einer Call-Option als auch der einer Put-Option berechnet wird. Darüber hinaus wird die Entwicklung des Aktienkurses anhand der in Kapitel 1 vorgestellten Greeks analysiert und Empfehlungen für einen möglichen Investor getroffen.

6.3.1 Einführung

Die Aktie von Borussia Dortmund hatte am 16.01.2014 einen Kurswert von 3.73 € pro Aktie und steht mittlerweile auf einem Stand von 3.98 € pro Aktie (Stand: 11.03.2014). Zur Zeit gibt es insgesamt 61.428.000 Aktien des BVB und auf der Hauptversammlung von Borussia Dortmund wurde am 25.11.2013 die Ausschüttung einer Dividende in Höhe von 0.10 € pro Aktie beschlossen.

Die Abbildung 11 stellt die Kursentwicklung der BVB-Aktie im Laufe des vergangenen Jahres dar:

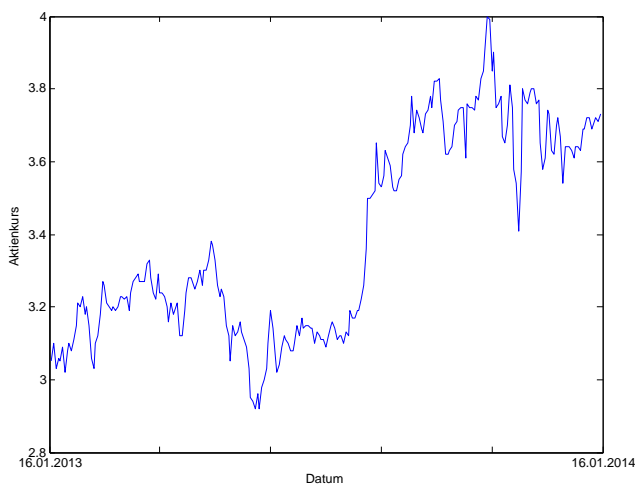


Abbildung 11: Entwicklung der BVB-Aktie ⁹

⁹Die Werte für diese Abbildung wurden von der Seite <http://de.finance.yahoo.com/q/hp?s=BVB.DE> entnommen und die Abbildung anhand dieser Werte in Matlab erstellt.

Bei der Analyse des Aktienkurses fällt auf, dass dieser stark von den Resultaten der Fußballspiele des BVB abhängt. Während der Verlauf der Aktie nach den Siegen gegen Malaga und Real Madrid in der Champions League stark steigend ist, fällt dieser ebenso stark nach der Niederlage im Finale der Champions League wieder ab.

6.3.2 Optionspreise

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird sowohl der Preis einer europäischen Put- als auch einer europäischen Call-Option für die BVB-Aktie berechnet.

Um eine Option bepreisen zu können, muss zunächst, wie bereits erwähnt, die Volatilität der Aktie mit in die Berechnung einbezogen werden.

Wird das oben erläuterte Verfahren zur Berechnung der historischen Volatilität auf die BVB-Aktie angewendet, erhält man eine historische Jahresvolatilität von 0.0406.

Für die Berechnung einer Put-Option sei zunächst das folgende Szenario gegeben:

Der Preis der Aktie beträgt zum Zeitpunkt $t = 0$ genau $S = 3.73 \text{ €}$ pro Aktie.

Ein potenzieller Investor möchte sich gegen fallende Aktienkurse absichern, die zum Beispiel durch eine mögliche Niederlage im Achtelfinale der Champions League verursacht werden könnten. Daher möchte er einen Put mit einem Ausübungspreis von $K = 3.73 \text{ €}$ pro Aktie kaufen, um bei einem etwaigen Kurseinbruch seine Aktie ohne Verlust verkaufen zu können. Die Laufzeit des Puts soll ein Jahr betragen, also $T = 1$.

Der Preis dieser Put-Option wird entweder über die Anwendung der Black-Scholes-Gleichung analytisch berechnet oder numerisch mithilfe des Crank-Nicolson Verfahrens. Wird die Black-Scholes-Gleichung auf die obigen Werte angewendet und wird ein risikofreier Zins von $r = 0.00545$ angenommen, ergibt sich der Preis von

$$P_{BS}^{\text{europ.}}(S = 3.73, t = 0) = 0.05065$$

als analytische Lösung. Soll die Lösung hingegen numerisch mithilfe des Crank-Nicolson Verfahrens bestimmt werden und werden dieselben Werte zugrunde gelegt, bekommt man einen Preis von

$$P_{CN}^{\text{europ.}}(S = 3.73, t = 0) = 0.05064,$$

wobei als Orts- bzw. Zeitschrittweiten $\Delta S = 0.005$ und $\Delta t = 0.0025$ gewählt wurden. Betrachtet man die Differenz dieser beiden Werte

$$|0.05065 - 0.05064| = 0.0001$$

wird deutlich, dass die Resultate der verschiedenen Methoden nahezu identisch sind. Der geringe absolute Fehler kann in der Praxis vernachlässigt werden.

Kapitel 6: Praktische Anwendung

Im Folgenden soll der Preis der Call-Option berechnet werden. Dafür wird das folgende Szenario betrachtet:

Ein potentieller Investor ist aufgrund der Ergebnisse der letzten Fußballspiele überzeugt, dass der Kurs der BVB-Aktien in der nächsten Saison weiter steigen wird. Aufgrund dessen überlegt er in einem Jahr weitere Aktien zu kaufen. Der Höchstpreis für diese Aktien soll dabei allerdings nicht höher als 4.00 € pro Aktie liegen. Um dies zu gewährleisten, möchte sich der Investor zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Call-Option auf diese Aktie zu einem Ausübungspreis von $K = 4.00$ € pro Aktie kaufen.

An dieser Stelle stellt sich die Frage nach dem heutigen Preis der Call-Option. Dieser kann wieder entweder analytisch oder numerisch berechnet werden. Die dafür benötigten Werte seien wie folgt gegeben:

$$S = 3.73, K = 4.00, T = 1, \sigma = 0.0406, r = 0.00545.$$

Werden diese Werte in die Black-Scholes-Gleichung eingesetzt, ergibt sich als Preis für die Call-Option

$$C_{BS}^{\text{europ.}}(S = 3.73, t = 0) = 0.0037464.$$

Setzt man die Werte hingegen wieder in das Crank-Nicolson Verfahren ein und wählt als Orts- bzw. Zeitschrittweite erneut $\Delta S = 0.005$ bzw. $\Delta t = 0.0025$, ergibt sich für den Preis

$$C_{CN}^{\text{europ.}}(S = 3.73, t = 0) = 0.0037467.$$

Der absolute Fehler

$$|0.0037464 - 0.0037467| = 0.0000003$$

ist in diesem Fall ebenfalls vernachlässigbar gering. Infolgedessen kann mithilfe dieser Methode der faire Optionspreis geeignet berechnet werden.

6.4 Die Greeks der BVB-Aktie

Im Allgemeinen liefern die Resultate der vorherigen Spiele keine verlässliche Aussage über den zukünftigen Verlauf des Aktienkurses. Daher ist sich der Investor noch nicht sicher, ob er in die Call-Option investieren soll. Aufgrund dessen wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit der Einfluss der dynamischen Kennzahlen - der Griechen - auf den Optionspreis analysiert.

In der folgenden Abbildung 12 ist der Einfluss der vier Griechen - Delta, Kappa, Theta und Rho - in Abhängigkeit vom Aktienkurs dargestellt.

Wie oben bereits erwähnt zeigt Delta dabei die Abhängigkeit des Optionspreises vom Aktienkurs auf, wogegen Kappa die Abhängigkeit der Volatilität darstellt. Theta beschreibt die Sensitivität gegenüber der Restlaufzeit und Rho die Sensitivität gegenüber des risikolosen Zinssatzes.

Kapitel 6: Praktische Anwendung

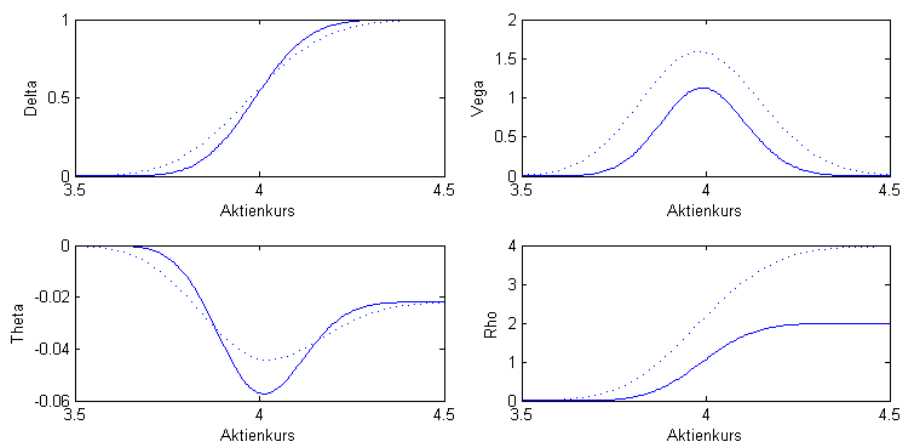


Abbildung 12: Die Greeks der BVB-Aktie

Aus der Abbildung 12 lassen sich dann für die jeweiligen Kennzahlen folgende Resultate zu den Zeitpunkten $t = 0$, dargestellt durch die gestrichelte Linie und $t = 0.5$ als durchgezogene Linie ziehen:

Das Delta ist zu jedem Zeitpunkt positiv, d.h. je höher der Aktienkurs steigt, umso teurer wird die Option. Da das Delta in diesem Fall monoton steigend ist, wird der Einfluss des Delta mit steigendem Aktienkurs ebenfalls immer größer. Der Verlauf dieser dynamischen Kennzahl verhält sich zu beiden Zeitpunkten nahezu identisch.

Die Kennzahl Kappa verläuft ebenfalls durchgehend im positiv Bereich. Dies bedeutet, dass der Optionspreis bei einer steigenden Volatilität ebenfalls steigt. Bei der BVB-Aktie ist der Einfluss des Kappas genau dann am größten, wenn der Aktienkurs in der Nähe des Ausübungspreises K liegt. Der Einfluss des Kappas ist zum Zeitpunkt $t = 0$ wesentlich größer als bei $t = 0.5$.

Theta ist die einzige der vier Kennzahlen, die bei der BVB-Aktie negativ ist. Dies hat zur Konsequenz, dass der Preis der Option immer geringer wird, umso näher der Zeitpunkt an den Ausübungspunkt rückt. Aufgrund dessen ist der Einfluss der Kennzahl Theta am größten, wenn der Aktienkurs in der Nähe des Ausübungszeitpunkts liegt.

Rho wird jetzt als letzte Kennzahl betrachtet. Diese Kennzahl hat erneut einen positiven Verlauf und infolgedessen steigt der Preis der Option mit steigendem Zinssatz. Ähnlich wie bei der Kennzahl Delta steigt der Einfluss des Zinssatzes mit steigendem Aktienkurs. Im Zeitpunkt $t = 0$ ist der Einfluss des Zinssatzes deutlich höher als zum Zeitpunkt $t = 0.5$.

Durch die Analyse der Eigenschaften der Kennzahlen können nun theoretische Empfehlungen für den potenziellen Investor abgeleitet werden.

Wird in Zukunft von einem steigenden Aktienkurs ausgegangen, sollte der Investor zu

dem jetzigen Zeitpunkt eine Call-Option kaufen, um die steigende Aktie später zu dem heutigen Preis zu kaufen.

Wird hingegen in naher Zukunft von einem sinkenden Kurs ausgegangen, der allerdings ziemlich schnell wieder einen steigenden Verlauf annimmt, sollte mit dem Kauf einer Call-Option noch gewartet werden.

Ist es wahrscheinlich, dass der Aktienkurs in Zukunft monoton sinkend ist, sollte anstelle der Call-Option eine Put-Option gekauft werden. Mit dem Put kann sich der Investor gegen mögliche Verluste absichern.

Wendet man diese Analyse auf die aktuellen Werte an, kommt man zu den folgenden Empfehlungen:

Am 11. März 2014 stand der Aktienkurs bei 3,98 € pro Aktie. Wird nun die Annahme getroffen, dass der BVB im Laufe des kommenden Jahres weiterhin erfolgreich spielen wird, kann von einem steigenden Aktienkurs ausgegangen werden.

Aufgrund dessen sollte in der heutigen Situation eine Call-Option gekauft werden, die einen Ausübungspreis von 4,00 € pro Aktie garantiert. Der Investor würde in diesem Fall einen Gewinn erzielen, wenn er seine Aktien über die Call Option in einem Jahr für einen Preis von 4,00 € pro Aktie kauft und dann am Markt direkt wieder für einen höheren Preis verkauft.

7 Gesamtfazit

Das dritte Kapitel erläuterte Finite-Differenzen-Verfahren, welche eine Möglichkeit darstellen, faire Optionspreise durch die Diskretisierung der Black-Scholes-Gleichung zu bestimmen. Dabei hat eine explizite Differenzenformulierung den großen Vorteil, dass für die einzelnen Zeitschritte keine impliziten Gleichungssysteme gelöst werden müssen. Bei den impliziten Differenzenformulierungen muss zwar für jeden Zeitschritt ein Gleichungssystem gelöst werden, aber dafür sind die Verfahren im Gegensatz zum expliziten Euler Verfahren uneingeschränkt stabil. Aufgrund der besseren quadratischen Konsistenzfehlerordnung ist das Crank-Nicolson Verfahren für die Zeitdiskretisierung am geeignetsten. Des Weiteren ist das Upwind-Verfahren für die Ortsdiskretisierung bei starken Konvektionstermen vorteilhaft, da der einseitige Differenzenquotient die Physik dieser Probleme besser umsetzt. Allerdings ist die Fehlerordnung nur linear und nicht quadratisch, wie bei Verfahren mit zentralen Differenzenquotienten.

Im vierten Kapitel wurde gezeigt, dass bei kleinen Volatilitäten die Black-Scholes Gleichung auf die Wärmeleitungsgleichung transformiert werden sollte, um Oszillationen und Instabilitäten bei der Lösung zu vermeiden.

Die Analyse der verschiedenen Löser im fünften Kapitel hat ergeben, dass die LR-Zerlegung am geeignetsten ist. Dies liegt daran, dass die Zerlegung lediglich einmalig durchgeführt werden muss und infolgedessen der benötigte Zeitaufwand gering wird.

Im sechsten Kapitel wurden die theoretischen Ausführungen auf das praktische Beispiel der BVB-Aktie angewandt. Aus dieser realen Anwendung kann abgeleitet werden, dass

Kapitel 7: Gesamtfazit

das Black-Scholes-Modell lediglich ein Modell ist und in der Praxis die strikten Modellvoraussetzungen nicht erfüllt sind. Allerdings kann diese Modell durch verschiedene Erweiterungen - wie beispielsweise die Berücksichtigung von Transaktionskosten, die als Resultat nicht-linearen PDE hätten - trotzdem zu realistischen Preisen der Optionen führen und ist infolgedessen für die Praxis weitgehend geeignet.

Im Wesentlichen liefert die vorliegende Arbeit das Resultat, dass mithilfe der Finite-Differenzen-Verfahren unter Einhaltung der strikten Modellvoraussetzungen eine effektive und effiziente Optionspreisbestimmung möglich ist. Allerdings ist es für den Anwender in der Praxis essentiell, dass er die Möglichkeit in Betracht zieht, dass die Realität unter Umständen diesen strikten Modellvoraussetzungen nicht folgt und daher auf Erweiterungen zurückgegriffen werden muss.

Literatur

- [1] **Bergara, Aitor** : Finite-difference Numerical Methods of Partial Differential Equations in Finance with Matlab.
- [2] **Günther, Michael/ Jüngel, Ansgar (2010)** : Finanzderivate mit Matlab - Mathematische Modellierung und numerische Simulation, 2. Auflage.
- [3] **Hanke – Bourgeois, Martin (2009)** : Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, 3. Auflage.
- [4] **Rannacher, Rolf/ Turek, Stefan** : Skriptum - Einführung in die Numerische Mathematik.
- [5] **Elliott, Robert/ Kopp, Ekkehard (1999)** : Mathematics of Financial Markets, 2. Auflage.