

10. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 35 und 37 ist Montag, 5.07.10, 12:15 Uhr.

Internetseite:

www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html

Aufgabe 34 Das durch Taylorentwicklung

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \frac{h}{2}y''(x) + \dots + \frac{h^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p)}(x) + O(|h|^p), \quad h \rightarrow 0,$$

gewonnene Einschrittverfahren der Konsistenzordnung p ergibt sich, wenn die Ableitungen $y^{(\ell)}$ wie in 9.31 ersetzt werden. Zeigen Sie für die gegebene AWA

$$y' = y^2, \quad y(-1) = \frac{1}{2} :$$

(i) Das durch Taylorentwicklung gewonnene Einschrittverfahren der Konsistenzordnung p hat die Zuwachsfunktion

$$\Phi_p(x, y, h) = \sum_{k=1}^p h^{k-1} y^{k+1}.$$

(ii) Für Schrittweiten $0 < h < 2$ gilt

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (y_0 + h\Phi_p(x_0, y_0, h)) = y(x_0 + h).$$

Aufgabe 35 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die implizite Trapezregel nur die Konsistenzordnung $p = 2$ hat. (**Hinweis:** siehe Beispiel 9.39 b))

Aufgabe 36

(i) Bestimmen Sie ein dreistufiges explizites RK-Verfahren der Konvergenzordnung 3 mit

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x, y), \\ K_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}K_1\right), \\ K_3 &= f\left(x + ha_3, y + h(b_{31}K_1 + 2K_2)\right) \quad \text{und} \quad a_3 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Stellen Sie auch die entsprechende Zuwachsfunktion Φ_K auf.

(ii) Betrachten Sie für die näherungsweise Lösung der AWA

$$y' = f(x, y), \quad y(\xi) = \eta,$$

das Halbschrittverfahren mit der Zuwachsfunktion $\Phi_H(f, x, y, h) = K_2$ und das RK-Verfahren aus (i). Zeigen Sie, dass für den lokalen Diskretisierungsfehler r_H des Halbschrittverfahrens die Formel

$$r_H = \frac{1}{6} (K_1 - 2K_2 + K_3) + O(h^3), \quad h \rightarrow 0,$$

gilt, indem Sie r_H mit dem lokalen Diskretisierungsfehler r_K des RK-Verfahrens aus (i) vergleichen.

Aufgabe 37 (4 Punkte) Gegeben sei die AWA

$$y' = xy, \quad y(0) = 1,$$

mit der Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Berechnen Sie mit Hilfe des

- (i) Polygonzugverfahrens
- (ii) Verfahrens von Heun 2.Ordnung
- (iii) klassischen RK-Verfahrens

jeweils zur Schrittweite $h = 1/2$ und $h = 1/4$ eine Näherung $y^{(h)}$ an $y(1) = \sqrt{e}$ und geben Sie den Fehler $y(1) - y^{(h)}$ an.