Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

3. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 8 und 9 ist Montag, 03.05.10, 12:15 Uhr.
Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 7

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Führen Sie zu dem Startvektor $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$ zwei Schritte des

Gesamtschrittverfahrens

Einzelschrittverfahrens

durch.

(ii) Zeigen Sie, dass die Verfahren in (i) konvergieren und geben Sie jeweils die *a priori* Fehlerabschätzung für $\|x^{(10)} - x\|_\infty$ an, ohne die Lösung x des Gleichungssystems oder $x^{(10)}$ zu berechnen.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Gegeben seien die Matrizen

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ t & 1 & t \\ t & t & 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Zeigen Sie, dass für $t \in (0.5, 1)$ die Matrix $A(t)$ positiv definit ist.

(ii) Sei $t \in (0.5, 1)$. Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$A(t)x = b, \qquad b \in \mathbb{R}^3,$$

nicht für jeden Startwert konvergiert, wohl aber das Einzelschrittverfahren.

Aufgabe 9 (3 Punkte)

(i) Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

und J die entsprechende Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens.

(a) Zeigen Sie, dass $\rho(J) = 0$ gilt.

(b) Für $x^{(0)} = (1, \dots, 1)^T$, sei $x^{(k+1)} = J \cdot x^{(k)}$ für $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \|x^{(k+1)}\|_\infty &= \|x^{(k)}\|_\infty = 1 \quad \text{für} \quad 0 \leq k \leq n-2, \\ \|x^{(k)}\|_\infty &= 0 \quad \text{für} \quad k \geq n. \end{aligned}$$

(ii) Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Diagonalelementen $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, mindestens ein Eigenwert der Iterationsmatrix des Einzelschrittverfahrens Null ist.

Aufgabe 10

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das SOR–Verfahren zur Lösung des obigen Gleichungssystems für alle $\omega \in (0, 2)$ und alle Startvektoren $x^{(0)} \in \mathbb{R}^4$ konvergiert.

(ii) Berechnen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$ mit dem SOR–Verfahren zu dem Relaxationsparameter $\omega = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$ fünf Näherungsvektoren für die exakte Lösung x^* des obigen Gleichungssystems. Berechnen Sie zur Kontrolle in jedem Iterationsschritt den Fehler

$$\|x^* - x^{(k)}\|_2, \qquad k = 0, 1, \dots, 5.$$