Prof. Dr. J. Stöckler
PD Dr. Maria Charina-Kehrein

Fakultät für Mathematik
TU Dortmund

5. Übungsblatt zur Numerik II
SS 2010 (Stöckler/Charina-Kehrein)

Abgabetermin für die Aufgaben 15 und 17 ist Montag, 17.05.10, 12:15 Uhr.
Internetseite:
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/new/de/lehrveranstaltungen/sose2010/numII10.html`

Aufgabe 15 (3 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gerschgorinschen Kreisesatzes das Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$, das alle Eigenwerte der Matrix A beinhaltet.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes 8.14 ff und der Intervallhalbierung die Intervalle $[a_i, b_i] \subset [a, b]$, $i = 1, \ldots, 5$, so dass jedes Intervall genau einen Eigenwert der Matrix A enthält.

(iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton–Verfahrens eine Näherung $\tilde{\lambda}$ an den zweitgrößten Eigenwert λ_2 der Matrix A mit

$$|\lambda_2 - \tilde{\lambda}| < 2^{-4}.$$

Aufgabe 16

Gesucht wird eine Näherung an den betragskleinsten Eigenwert λ_3 von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie eine LR–Zerlegung der Matrix A.

(ii) Führen Sie ausgehend von $(1, 0, 0)^T$ drei Schritte der inversen Iteration nach Wielandt durch, unter Verwendung der LR–Zerlegung aus (i).

(iii) Ermitteln Sie mit Hilfe des Rayleigh–Quotienten eine Näherug an λ_3.

Aufgabe 17 (3 Punkte)

(i) Formulieren Sie für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen Algorithmus der Rayleigh–Quotienten Iteration mittels der Inversen Iteration nach Wielandt mit Diagonal–Shift $\mu \in \mathbb{R}$. Unter welchen Voraussetzungen an A, μ und einen Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ wird dieser Algorithmus konvergent?

(ii) Führen Sie ausgehend von dem Startvektor $x^{(0)} = (1,0,0,0)^T$ drei Schritte des Algorithmus in (i) für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -16 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -20 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Shift $\mu = -15$ durch.

Aufgabe 18 Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & -2 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

mittels einer Householder–Transformation unitär–ähnlich auf Hessenberggestalt.