Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
keine Abgabe

Lineare Algebra II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (Wiederholung)

Sei $J := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2n, 2n)$. Sei weiter

$$\mathrm{Symp}(2n) := \{M \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2n, 2n) \ \mid \ M^T J M = J\}.$$

a) Bestimmen Sie $\det J$.

b) Zeigen Sie, dass alle $M \in \mathrm{Symp}(2n)$ invertierbar sind und dass gilt: $M^{-1} = J^{-1} M^T J$.

c) Zeigen Sie: $\mathrm{Symp}(2n)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$.

d) Sei nun $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit $A, B, C, D \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ beliebig. Zeigen Sie: $M \in \mathrm{Symp}(2n)$ genau dann, wenn $A^T C$ symmetrisch, $B^T D$ symmetrisch und $A^T D - C^T B = E_n$.

Aufgabe 2

a) Es seien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $v_1, \dots, v_k \in V$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

   Die Familie $\mathcal{A} := (v_1, \dots, v_k)$ ist genau dann lin. unabh., wenn die Matrix $M_{\mathcal{A}} := (\langle v_i, v_j \rangle)$ positiv definit ist.

b) Sei $V = \mathcal{P}_n$. Bestimmen Sie bzgl. der Monombasis die Gramsche Matrix des Skalarproduktes

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 p(t) q(t) \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3

Es sei $V := \{f \in C^1[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ der Raum der auf dem Intervall $[0,1]$ einmal stetig differenzierbaren Funktionen, die auf dem Rand verschwinden.
Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f'(x) g'(x) \mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.
[*] Zeigen Sie die Poincaré–Ungleichung:

$$\int_0^1 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x \ \le \ \int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$