Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 15.4.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (Pflichtabgabe)

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist und bestimmen Sie mit dem Gram–Schmidt–Verfahren eine ONB des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des von A induzierten Skalarproduktes $\langle\, , \rangle_A$.

Aufgabe 5 (Pflichtabgabe)

Es sei $V := \mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Sei weiter $b : V \times V \to \mathbb{R}$ das durch

$$b(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) \mathrm{d}t$$

definierte Skalarprodukt. Sei weiter $\mathcal{A} := \{1, t, t^2, t^3\}$ die Standardbasis.

a) Bestimmen Sie die Orthogonalbasis $\mathcal{B} := (\widetilde{w}_0, \ldots, \widetilde{w}_3)$ der Legendre–Polynome.

b) Bestimmen Sie die Orthonormalbasis $\mathcal{B} := (w_0, \ldots, w_3)$ der normierten Legendre–Polynome.

c) Gegeben seien $\lambda \in \mathbb{R}$, die Polynome $f := 2w_0 + w_1 - 3w_2 - w_3$ und $g_\lambda := w_0 - w_1 + w_2 - \lambda w_3$. Bestimmen Sie λ so, dass f und g orthogonal sind.

Aufgabe 6

Es seien $(V, \langle\, , \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $\mathcal{A} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Weiter seien G die Gramsche Matrix bzgl. $\mathcal{A}$ und $G^{-1} = (\gamma_{ij})$ ihre Inverse.
Definiere nun $w_j := \sum\limits_k \gamma_{kj} v_k$, $1 \leq j \leq n$. D.h. $\mathcal{B} := (w_1, \ldots, w_n)$ ist Basis von V.

a) Bestimmen Sie $\langle v_i, w_j \rangle$.

b) Zeigen Sie: Für $v \in V$ gilt: $v = \sum\limits_k \langle v, v_k \rangle\, w_k = \sum\limits_k \langle v, w_k \rangle\, v_k$.

Aufgabe 7

Es seien $(V, \langle\, , \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Orthonormalsystem (ONS). D.h. $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Orthonormalbasis (ONB).

b) Für alle $x \in V$ gilt: $\langle x, x \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} |\langle x, v_j \rangle|^2$.

c) Ist $\langle x, v_j \rangle = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$, dann ist $x = 0$.

d) Für alle $x, y \in V$ gilt: $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle \langle y, v_j \rangle$