Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 29.4.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 4

Aufgabe 12 (Pflichtabgabe)

Bei der Bildkompression (z.B. jpg) werden Fouriertransformationen verwendet. Ihre beschreibenden Matrizen $F \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(N,N)$ sind von der Form

$$F = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\omega_N^{kl}\right)_{0 \le k,l \le N-1}.$$

Dabei ist $\omega_N := e^{i2\pi/N}$ die primitive N-te Einheitswurzel. Zeigen Sie: F ist unitär.

Aufgabe 13 (Pflichtabgabe)

Def.: Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n)$ heißt normal, wenn gilt: $AA^H = A^H A$.

Es seien $B, C \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$ und $A := B + iC$, sowie

$$R = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

a) A ist genau dann normal, wenn die Matrix R normal ist.

b) A ist genau dann hermitesch, wenn R symmetrisch ist.

c) A ist genau dann positiv definit, wenn R positiv definit ist.

d) A ist genau dann unitär, wenn R orthogonal ist.

Aufgabe 14

Im Folgenden seien stets $A, S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$. Zeigen Sie:

a) $E_n + AA^T$ ist positiv definit.

b) Ist S schiefsymmetrisch, so ist die Cayley–Transformation

$$T := (E_n - S)(E_n + S)^{-1}$$

eine Orthogonalmatrix. Begründen Sie dabei zunächst, dass $E_n + S$ invertierbar ist!

c) Ist A orthogonal und $E_n + A$ regulär, dann gibt es ein schiefsymmetrisches S, so dass

$$A = (E_n - S)(E_n + S)^{-1}$$

Aufgabe 15

Es sei $V := \{f \in C^\infty[0,1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Seien weiter $F, G : V \to V$ definiert durch $F(f) := f'$ und $G(f) = f''$. Zeigen Sie: Für G gilt $\langle G(f), g \rangle = \langle f, G(g) \rangle$ und für F ist dies i.a. falsch. Warum ist G trotzdem nicht selbstadjungiert?