Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 6.5.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Aufgabe 16 (Pflichtabgabe)

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+3i & 1-i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1+3i & 1-i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1+3i & 1-i \\ 1-i & 1-i & 1-i & 1+3i \end{pmatrix}$$

Eigenwerte, Eigenräume und geometrische, sowie algebraische Vielfachheit der Eigenwerte.

Aufgabe 17 (Pflichtabgabe)

Zeigen Sie:

a) Ist λ ein Eigenwert einer invertierbaren Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n,n)$, so ist $\lambda \neq 0$, und λ^{-1} ist ein Eigenwert von A^{-1}.

b) Die obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $a_1, \dots, a_n$.

c) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

ist $P_A(t) = (-1)^n(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0)$.

Aufgabe 18

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Ist $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$, so sind die Eigenwerte der Matrix A^2 nichtnegativ.

b) Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ gilt $A^2 = E_n$ genau dann, wenn A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix mit Diagonalelementen 1 oder -1. (Tipp: $x + Ax$)

c) Es gibt keine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$ mit $A^2 = -E_n$.

Aufgabe 19

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n).$$

Zeigen Sie, dass für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x_j^{(k)} = \sin \frac{jk\pi}{n+1}$ ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_k = 2 - 2\cos \frac{k\pi}{n+1}$.