Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 13.5.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Aufgabe 20 (Pflichtabgabe)

Es seien $F, G \in \text{Hom}(V)$ mit $F \circ G = G \circ F$. Zeigen Sie:

a) $\text{Kern}\, F$ und $\text{Bild}\, F$ sind invariant bzgl. G.

b) Für jeden Eigenwert λ von F ist $\text{Eig}(F, \lambda)$ invariant bzgl. G.

c) Ist G trigonalisierbar, so gibt es zu jedem Eigenwert λ von F einen Vektor $v_\lambda \in \text{Eig}(F, \lambda)$, der Eigenvektor von G ist.

Aufgabe 21 (Pflichtabgabe)

Untersuchen Sie die folgenden reellen Matrizen auf Trigonalisierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die zugehörigen Transformationsmatrizen.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22

Seien $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(n, n)$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) A ist nicht invertierbar $\Leftrightarrow$ 0 ist Eigenwert von A.

b) A und B haben die gleichen Eigenwerte $\Rightarrow$ A und B sind ähnlich.

c) A und A^T haben die gleichen Eigenwerte.

Aufgabe 23

Es seien $A, B \in \text{Mat}_{\mathbb{K}}(n, n)$ und für $0 \leq i \leq n$ sei $N_i := \begin{pmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

a) Für $0 \leq i \leq n$ besitzen AN_i und N_iA das gleiche charakteristische Polynom.

b) AB und BA besitzen das gleiche charakteristische Polynom.

c) Für $F, G \in \text{Hom}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:
λ ist EW von $F \circ G \Leftrightarrow \lambda$ ist EW von $G \circ F$.