Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 20.5.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 7

Aufgabe 24 (Pflichtabgabe)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n,n)$ normal und $\lambda, \mu \in S_A$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \mathrm{Eig}(A^H, \overline{\lambda})$.

b) Für $\lambda \neq \mu$ ist $\mathrm{Eig}(A,\lambda) \perp \mathrm{Eig}(A,\mu)$.

Aufgabe 25 (Pflichtabgabe)

Es seien $\dim V = n < \infty$, $F \in \mathrm{Hom}(V)$ und $v, w \in V$.

Das <u>Annullatorpolynom</u> $P_{F,v}$ ist definiert als das normierte Polynom kleinsten Grades (d.h. der höchste Koeffizient ist 1), für das gilt: $P_{F,v}(F)(v) = 0$.

Für $U \preccurlyeq V$ ist das Annullatorpolynom $P_{F,U}$ das normierte Polynom kleinsten Grades, so dass für alle $u \in U$ gilt: $P_{F,U}(F)(u) = 0$.

Das <u>Minimalpolynom</u> von F definiert man in diesem Sinne durch: $m_F(t) := P_{F,V}(t)$.

Zeigen Sie:

a) Sind $(v, F(v), \ldots, F^k(v))$ lin. unabh. und $F^{k+1}(v) = \alpha_k F^k(v) + \ldots + \alpha_1 F(v) + \alpha_0 v$, dann gilt:
$$P_{F,v}(t) = t^{k+1} - \alpha_k t^k - \alpha_{k-1} t^{k-1} - \ldots - \alpha_1 t - \alpha_0.$$

b) In der Situation von a) gilt für $j \in \mathbb{N}$, dass $P_{F,v}(F)(F^j(v)) = 0$.

c) Sei $U := \mathrm{Span}\{v, w\}$. Dann gilt:
$$P_{F,U} = \mathrm{kgV}(P_{F,v}, P_{F,w}).$$

d) Sei nun konkret
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Vektoren $v_1 = (1,2,2,1,2)^T$, $v_2 := (2,0,0,1,1)^T$ und $v_3 := (1,1,1,-1,1)^T$ die Annullatorpolynome, und berechnen Sie daraus das Minimalpolynom $m_A(t)$.

Aufgabe 26

Bestimmen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

eine ONB aus Eigenvektoren.

Aufgabe 27

Es seien $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n,n)$ symmetrisch, $\lambda := \min S_A$ der kleinste und $\mu := \max S_A$ der größte EW von A. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) $\lambda = \min\limits_{\|x\|=1} \{x^T Ax\}$.

b) $\mu = \max\limits_{\|x\|=1} \{x^T Ax\}$.