

Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Aufgabe 40 (Pflichtabgabe)

Es sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, n)$ mit $\text{Rang } A = r$. Zeigen Sie:

- Es gibt Matrizen $F \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, r)$ und $R^H \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(r, n)$ mit $\text{Rang } F = \text{Rang } R^H = r$ und $A = FR^H$. Tipp: Betrachten Sie die linear unabhängigen Spalten von A .
- Die Matrix $A^+ := R(R^H R)^{-1}(F^H F)^{-1}F^H$ ist wohldefiniert und erfüllt

$$AA^+A = A \quad (1)$$

$$A^+AA^+ = A^+ \quad (2)$$

$$(AA^+)^H = AA^+ \quad (3)$$

$$(A^+A)^H = A^+A \quad (4)$$

A^+ heißt die Moore–Penrose–Inverse (MPI) von A . Ihre Eindeutigkeit wird in Aufgabe 42 bewiesen.

Aufgabe 41 (Pflichtabgabe)

Es sei $N \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(3, 3)$ nilpotent.

- Zeigen Sie: Für die Matrix $E_3 - N$ ist $A := E_3 - \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ eine Wurzel, d.h. $A^2 = E_3 - N$.
- Bestimmen Sie Wurzeln für $E_3 + N$ und $\lambda E_3 + N$.

Aufgabe 42

Es sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, n)$ und $A^+ \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, m)$ ihre MPI. Zeigen Sie:

- Ist $B \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, m)$ eine weitere Matrix, die die Bedingungen (1) bis (4) der MPI erfüllt, so ist $A^+ = B$.
- Sind $U \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, m)$ und $V \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, n)$ unitär, so ist

$$(UAV)^+ = V^H A^+ U^H$$

- Ist $\text{Rang } A = m$, so ist $A^+ = A^H(AA^H)^{-1}$.

Aufgabe 43 (MPI und Bestapproximation)

Es sei $A \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(m, n)$ und $A^+ \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n, m)$ ihre MPI. Zeigen Sie:

- Die Abbildung $F : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$, $x \mapsto (E_m - AA^+)x$ ist eine orthogonale Projektion auf $(\text{Bild } A)^\perp$.
- Für jedes $x \in \text{Bild } A^H$ gilt: $A^+Ax = x$.
- Für ein LGS $Ax = b$ ist der Vektor $x_0 := A^+b$ die Bestapproximation (der Lösung) mit kleinster euklidischer Norm.