Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 24.6.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 12

Aufgabe 44 (Pflichtabgabe)
Es sei $V = \mathbb{K}[t]_{\leq 2}$. Weiter seien $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ mit

$$f_1(p) := \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t, \quad f_2(p) := \int_0^2 p(t)\mathrm{d}t, \quad f_3(p) := \int_0^{-1} p(t)\mathrm{d}t.$$

a) Zeigen Sie, dass (f_1, f_2, f_3) eine Basis von V^* ist. Finden Sie dazu eine Basis (v_1, v_2, v_3) von V, so dass $f_i(v_j) = \delta_{i,j}$ ist.

b) Es sei $D : V \to V$ der (formale) Ableitungsoperator. Bestimmen Sie Kern D^*.

Aufgabe 45 (Pflichtabgabe)
Es sei $V = \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n, n)$. Weiter sei $f \in V^*$ mit $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in V$.

a) Zeigen Sie, dass f ein Vielfaches des Spur–Operators ist, d.h. es ist $f(A) = c \cdot \mathrm{Spur}\, A$.
Tipp: Betrachen Sie AE_{ij} und $E_{ij}A$. Zunächst für $i = j$.

b) Es sei $U = \{M \in V \mid \text{es gibt } A, B \in V \text{ mit } M = AB - BA\}$.
Zeigen Sie: $U = \{M \in V \mid \mathrm{Spur}\, M = 0\}$.

Aufgabe 46
Es sei $V = \mathbb{K}[t]$.

a) Zeigen Sie: $V^* \simeq \{(c_0, c_1, \ldots) \mid c_i \in \mathbb{K}\} =: \mathcal{F}$.
Tipp: Betrachten Sie für $\varphi \in V^*$ die Bilder der Monome t^k und vergleichen Sie diese mit $\varphi(p)$, $(p \in V)$.

b) Es sei $\varphi_k \in V^*$ mit $\varphi_k(t^l) = \delta_{k,l}$, $(k, l \in \mathbb{N}_0)$. Zeigen Sie, dass die Familie (φ_k) keine Basis von V^* ist.

c) Es sei $D : V \to V$ der (formale) Ableitungsoperator. Bestimmen Sie für $\varphi \in V^*$ das Bild $D^*\varphi$.

d) Sei nun speziell $\varphi(p) := \int\limits_0^1 p(t)\mathrm{d}t$. Geben Sie für $D^*\varphi$ die Darstellung als Element von $\mathcal{F}$ an.

Aufgabe 47
Es sei $\dim V = n < \infty$. Weiter seien $U_1, U_2 \preccurlyeq V$ Unterräume. Zeigen Sie:

a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$