Prof. Dr. J. Stöckler
Dr. T. Camps
Dipl. Wirt.-Math. T. Springer

SoSe 2011
Abgabe: bis Fr, 1.7.11, 12 Uhr
in die Briefkästen im Foyer

Lineare Algebra II

Übungsblatt 13

Aufgabe 48 (Pflichtabgabe)

Auf $V = \mathbb{R}^3$ sei durch

$$q(x) := 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

eine quadratische Form gegeben.

a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der zugehörigen symmetrischen Bilinearform (bzgl. der Standardbasis).

b) Bestimmen Sie durch simultane Spalten– und Zeilenumformungen eine Basis $\mathcal{A}$, für die die Darstellungsmatrix Diagonalgestalt hat.

c) Geben Sie die Koordinaten eines Vektors v in der Basis an, für die q Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 49 (Pflichtabgabe)

Es sei $F \in \mathrm{Hom}(V)$, $\dim V = n < \infty$.

a) Ist F diagonalisierbar und $\mathcal{A} := (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis, so dass $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) := \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ Diagonalgestalt hat, dann gilt für die duale Basis $\mathcal{A}^* := (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$

$$F(v) = \sum_{k=1}^{n} d_k \varphi_k(v) v_k$$

b) Ist $F^2 = F$, so ist $V = \mathrm{Kern}\, F \oplus \mathrm{Bild}\, F$.

c) Ist $F^2 = F$ und F normal, so ist F eine Orthogonalprojektion.

d) Ist $A \in \mathrm{Mat}_K(n,n)$ eine obere Dreiecksmatrix und normal, so ist A diagonalisierbar.

Aufgabe 50

Es seien $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ und $W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, jeweils versehen mit dem Skalarprodukt

$$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t.$$

Weiter sei $F : V \to W$ definiert durch

$$F(p) := 3p + 2 \int p.$$

Bestimmen Sie F^{ad}.

Aufgabe 51

Auf $V = \mathbb{R}^4$ betrachten wir die quadratische Form

$$q((x,y,z,t)^T) := t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

Ein Endomorphismus L von V mit der Eigenschaft $q(L(v)) = q(v)$ (für alle $v \in V$) heißt Lorentz–Transformation. Wir entwickeln im Folgenden eine Methode zur Konstruktion von Lorentz–Transformationen. Beachten Sie, dass durch diese Methode nach Aufgabe f) nicht alle Lorentz–Transformationen charakterisiert werden.

a) Es sei $H := \{A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2,2) \mid A = A^H\}$ der reelle Vektorraum der hermiteschen Matrizen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$U : \begin{cases} V & \rightarrow & H \\ (x,y,z,t)^T & \mapsto & \begin{pmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{pmatrix} \end{cases}$$

ein Isomorphismus ist.

b) Zeigen Sie: Für alle $v \in V$ ist $q(v) = \det U(v)$.

c) Es sei $T \in \mathrm{Hom}(H)$. Dann ist $L := U^{-1}TU \in \mathrm{Hom}(V)$.

d) Es sei $M \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2,2)$. Zeigen Sie, dass durch $T_M(A) := M^H A M$ ein Endomorphismus von H definiert wird.

e) Ist $M \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(2,2)$ mit $|\det M| = 1$, dann ist $L_M := U^{-1}T_M U$ eine Lorentz–Transformation.

f) Finden Sie eine Lorentz–Transformation, die nicht darstellbar ist als ein L_M.