Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Christoph Buchheim
Dipl.-Math. Tobias Kloos

Dortmund, 17.12.2015

Lineare Algebra I

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 11.01.2016, 18:00 Uhr

Aufgabe 37 (Pflichtaufgabe)

a) Untersuchen Sie, ob folgende Abbildungen linear sind. Geben Sie dazu jeweils entweder eine Matrix A an mit $F_i = F_A$, oder beweisen Sie, dass F_i nicht linear ist.

(i) $F_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3 - 2x_1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$,

(ii) $F_2 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$,

(iii) $F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$,

(iv) $F_4 : \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Abbildung $F : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^2,\ \varphi \mapsto \varphi(1)$ linear? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 38 (Pflichtaufgabe)

Wir betrachten die folgenden Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie, sofern die Multiplikation definiert ist, die Produkte A_iA_j $(1 \leq i, j \leq 3)$.

b) Berechnen Sie $F_{A_3} \circ F_{A_1}(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

c) Wir betrachten jetzt $F_A \colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis des Kerns und des Bildes von F_A.

Aufgabe 39 (Pflichtaufgabe)
Gibt es eine lineare Abbildung $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit den folgenden Eigenschaften? Beweisen oder widerlegen Sie.

a)
$$F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\5\\7\\5\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\9\\6\\7\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}6\\9\\6\\18\end{pmatrix}$$

b)
$$F(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\5\\7\\5\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\9\\6\\7\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}6\\9\\6\\18\end{pmatrix}$$

Aufgabe 40

a) Es seien K_2 ein Körper, K_1 ein Teilkörper von K_2 und V ein K_2-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V damit auf natürliche Weise auch einen Vektorraum über K_1 bildet.

b) Geben Sie jeweils eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$, des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^2$, des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}$ und des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^2$ an. Welche Dimension haben die Räume?

c) Es sei $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \overline{z}$ (komplexe Konjugation). Ist F eine lineare Abbildung des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}$? Ist F eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}$? Beweisen oder widerlegen Sie.

Organisatorisches

- Aktuelle Informationen zur Vorlesung finden sich unter
`www.mathematik.tu-dortmund.de/lsviii/`

- Pro Pflichtaufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden. Die zusätzliche Aufgabe wird ebenfalls korrigiert, jedoch nicht bepunktet.

- Abgaben von bis zu drei Personen sind gestattet. Geben Sie die Aufgaben bitte leserlich ab und versehen Sie die Blätter mit allen Namen der Gruppenteilnehmern, sowie der Nummer der Übungsgruppe.