TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz
SS 2011

Analysis II
Blatt 1
Abgabe: 13. April 2011

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Integration.* Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$\textbf{(a)} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos x \, \mathrm{d}x, \quad \textbf{(b)} \int_0^1 \tanh x \, \mathrm{d}x, \quad \textbf{(c)} \int_e^{e^2} \frac{1}{x \log x} \, \mathrm{d}x, \quad \textbf{(d)} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionenfolgen punktweise und/oder gleichmäßig konvergieren. Konvergieren die Integrale? Was lässt sich über die Konvergenz der Ableitungen sagen? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2\left|x - \frac{2n+1}{2}\right| & \text{für} \quad x \in [n, n+1], \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Satz von Dini.* Seien $D := [0,1]$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetige Funktionen. Ferner gelte $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$, und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere punktweise in D gegen eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig in D gegen f konvergiert.

Tipp: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie die folgenden Aussagen beweisen. Schritt 1: Falls die Aussage nicht gilt, so existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]$ mit $f(x_n) - f_n(x_n) > 3\varepsilon$. Schritt 2: Es existiert eine Teilfolge $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $z \in [0,1]$ mit $x'_k \to z$ $(k \to \infty)$. Schritt 3: Es existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Schritt 4: Es existiert ein $\delta = \delta(N)$, sodass $|f(x) - f_N(x)| < 3\varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - z| < \delta$. Schritt 5: Es gilt $|f(x) - f_n(x)| < 3\varepsilon$ für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - z| < \delta$ und für alle $n \ge N$. Schritt 6: Folgern Sie einen Widerspruch.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für $D \subset \mathbb{K}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, wenn $\|f_n - f\|_{\sup,D} \to 0$, $n \to \infty$ gilt (vgl. 1.7 Bemerkung).