TU Dortmund SS 2011
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Analysis II
Blatt 10
Abgabe: 14. Juni 2011, 12:00

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x) := \frac{x}{\|x\|^2}$, geben Sie das Differential von f an und bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, für die $df(x)$ invertierbar ist. Interpretieren Sie die lineare Abbildung $df(x)$ geometrisch. Existiert eine (globale) Inverse zu f? Geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $L(x) := \sqrt{1 + \|x\|^2}$. Berechnen Sie dann die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(x) := \nabla L(x)$ und bestimmen Sie $V := f(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie weiterhin, dass f (global) invertierbar ist mit stetig differenzierbarer Inverser $g := f^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$. Berechnen Sie schließlich die Abbildung $H : V \to \mathbb{R}$, $H(y) := y \cdot g(y) - L(g(y))$.

Entscheiden Sie in den folgenden Aufgaben, ob die verschiedenen Aussagen unter den jeweiligen Voraussetzungen richtig oder falsch sind. Setzen Sie für 'richtig' ein Kreuz in das erste Feld, für 'falsch' ein Kreuz in das zweite Feld und kein Kreuz, falls Sie keine Aussage machen wollen. Für jede korrekte Entscheidung bekommen Sie einen halben Punkt, für jede falsche Entscheidung einen halben Minuspunkt. Falls Sie keine Aussage machen, bekommen Sie weder einen halben Plus- noch einen halben Minuspunkt. Bei der Besprechung in den Übungen müssen Sie Ihre Entscheidungen begründen können (Gegenbeispiel bzw. Referenz zu Vorlesung oder Übungsaufgabe). Bitte beachten Sie auch die Aufgaben auf der zweiten Seite!

☒ ☐ für 'Aussage richtig'

☐ ☒ für 'Aussage falsch'

☐ ☐ für 'keine Aussage'

Aufgabe 39 (2 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbar mit Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_n$.

☐ ☐ f ist (total) differenzierbar.

☐ ☐ Es existiert $\mathrm{div} f$.

☐ ☐ Es existiert Δf_1.

☐ ☐ Es existiert für $v := \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ die Richtungsableitung $\partial_v f$.

Aufgabe 40 (2 Punkte)**.** Sei $f : [0, 2] \to \mathbb{R}^m$ nach der Bogenlänge parametrisiert.

☐ ☐ Falls f regulär ist, so ist f einfach.

☐ ☐ Es gilt Länge$(f) = 2$.

☐ ☐ Falls f zweimal differenzierbar ist, so gilt $f''(t) \cdot f'(t) = 0$ für alle $t \in [0, 2]$.

☐ ☐ Falls $g : [0, 2] \to \mathbb{R}^m$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, falls $f([0, 2]) = g([0, 2])$ und falls $f(t) = g(t)$ für ein $t \in [0, 2]$, so folgt $f = g$.

Aufgabe 41 (2 Punkte)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^m$.

☐ ☐ Falls f total differenzierbar ist und $v \in \mathbb{R}^m$, so ist $f \cdot v : U \to \mathbb{R}$ total differenzierbar.

☐ ☐ Falls f partiell differenzierbar ist und $\partial_i f$ stetig auf $B(0,r) \subset U$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$ und ein $r > 0$, dann ist f total differenzierbar in 0.

☐ ☐ f ist genau dann total differenzierbar, falls alle Richtungsableitungen existieren.

☐ ☐ Falls f total differenzierbar ist und $K \subset U$ kompakt ist, so nimmt $\|f\|^2 : K \to \mathbb{R}$ in K sein Minimum an.

Aufgabe 42 (2 Punkte)**.**

☐ ☐ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann zweimal stetig partiell differenzierbar, falls f zweimal partiell differenzierbar ist und $\partial_1\partial_2 f = \partial_2\partial_1 f$ gilt.

☐ ☐ Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x \cdot \vec{e}_1| > 1\}$. Dann ist eine partiell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ genau dann konstant, wenn $\nabla f = 0$ in U gilt.

☐ ☐ Sei $V := B(0,1) \subset \mathbb{R}^4$ und $f : V \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in V$. Dann hat f kein lokales Extremum.

☐ ☐ Sei $W := \overline{B(0,1)} \subset \mathbb{R}^5$ und $f : W \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in W$. Dann nimmt f sein Maximum nicht an.