TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2011

Analysis II
Blatt 11
Abgabe: 21. Juni 2011, 12:00

Aufgabe 43 (4 Punkte). Zeigen Sie, dass im Beweis des Umkehrsatzes 7.10 ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$ angenommen werden kann: Zeigen Sie dass aus 7.10 für $x_0 = 0$ und $f(x_0) = 0$ die Aussage aus 7.10 für beliebige x_0 und $f(x_0)$ gefolgert werden kann (vgl. Bemerkung zu Beginn von Schritt (i) des Beweises).

Aufgabe 44 (4 Punkte). Gegeben seien zwei Funktionen $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, für die $\nabla f(x) = g(x)x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, wobei $n \geq 2$ sei. Zeigen Sie, dass f auf jeder Sphäre $\partial B(0, r)$ vom Radius $r > 0$ um den Ursprung konstant ist.
Hinweis: Betrachten Sie zu zwei Punkten auf $\partial B(0, r)$ einen glatten Weg in $\partial B(0, r)$, der beide verbindet.

Aufgabe 45 (4 Punkte). Die Kugelkoordinatenabbildung des $\mathbb{R}^3$ ist definiert durch $K : [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $K(r, \varphi, \psi) := (r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, r \sin \psi)$.

(a) Skizzieren Sie die folgenden Kurven:
  (i) $K(1, \cdot, \psi) : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ für ein festes $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
  (ii) $K(1, \varphi, \cdot) : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ für ein festes $\varphi \in [0, 2\pi]$,

(b) Wir fassen nun die Einheitssphäre $S^2 = \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ als die Erdoberfläche mit Nordpol $(0, 0, 1)$ und Nullmeridian $\{(x, 0, z) \in S^3 : x \geq 0\}$ auf. Seien $\varphi \in (-\pi, \pi]$ und $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Was ist dann die geographische Länge bzw. Breite des Punktes $K(1, \varphi, \psi)$?

(c) Berechnen Sie die Jacobimatrix $DK(r, \varphi, \psi)$. Für welche Punkte (r, φ, ψ) ist ihr Rang maximal? Welche anderen Werte nimmt der Rang an, und in welchen Punkten? Wo liegen die zugehörigen Bildpunkte?

Aufgabe 46 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x, y) := (\sin(2x), \sin(3y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Was ist das Bild von f? Wie oft wird jeder Bildpunkt getroffen?

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Umkehrsatzes: Es gibt eine offene Umgebung U von $(0, 0)$, so dass $f|_U$ injektiv ist. Was ist die Jacobi-Matrix der zugehörigen Umkehrabbildung g im Punkt $(0, 0)$?

(c) Was ist die größte offene Umgebung U von $(0, 0)$, so dass $f|_U$ injektiv ist?