TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2011

Analysis II

Blatt 12

Abgabe: 28. Juni 2011, 12:00

Aufgabe 47 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie die Hesse-Matrizen der folgenden Funktionen in den angebenen Punkten (x_0, y_0) auf Definitheit:

(a) $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := e^{x^2+y^2} + ye^x, \quad (x_0,y_0) = (0,0),$$

(b) $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := -\frac{1}{2}x^2 - 2xy + y^2 + 7x - 5y, \quad (x_0,y_0) = (1,2),$$

(c) $$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y) := \cos(x^2+y) + xy, \quad (x_0,y_0) = (\sqrt{2\pi}, \frac{\pi}{2}).$$

Aufgabe 48 (4 Punkte)**.** Bestimmen Sie jeweils den Rang der Jacobi-Matrizen der folgenden Funktionen in den angebenen Punkten (x_0, y_0, z_0):

(a) $f(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^4 \\ xyz \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,1,1)$,

(b) $g(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^2 + e^{x+y+z} + ze^{-(x+y)} \\ x^2y^2 - z \\ \sin(x^2 + y^3 - z^6) \end{pmatrix}$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,0)$.

Aufgabe 49 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^2 - xy + 4y^2$ und das Innere $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 < 1\}$ einer Ellipse $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 = 1\}$.

(a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf E.

(b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f auf dem Rand ∂E von E.

(c) Was ist das Maximum bzw. Minimum von f auf dem Abschluss $\overline{E}$ von E?

Aufgabe 50 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie Quader im dreidimensionalen Raum und beweisen Sie, dass unter allen Quadern gleicher Oberfläche der Würfel das größte Volumen hat.