TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz
SS 2011

Analysis II

Blatt 13

Abgabe: 05. Juli 2011, 12:00

Auf diesem Blatt können Sie 4 Zusatzpunkte erreichen.

Aufgabe 51 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie für $a > 0$ das Ellipsoid

$$M := \left\{ (x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Bestimmen Sie mit der Charakterisierung (2) aus 7.26 den Tangentialraum T_pM in einem beliebigen Punkt $p \in M$.

(b) Bestimmen Sie mit der Charakterisierung (3) aus 7.26 den Tangentialraum T_pM im Punkt $p = (x,y,z)^T \in M$ mit $y = z = \frac{1}{2}$ und $x > 0$. Überzeugen Sie sich, dass das Ergebnis konsistent mit **(a)** ist.

(c) Bestimmen Sie den Tangentialraum T_pS^2 der Sphäre $S^2 = \partial B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ in einem beliebigen Punkt $p \in S^2$.

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie für $a > 0$ das Integral

$$\int_0^a x^2 \sin x \, \mathrm{d}x,$$

indem Sie die durch

$$F(y) := \int_0^a \sin(xy) \, \mathrm{d}x$$

definierte Funktion $F : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$ betrachten und F'' untersuchen.

Aufgabe 53 (4 Punkte)**.** Sei $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{für} \quad x^2 + y^2 \le 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

und interpretieren Sie das Ergebnis als Volumen eines Körpers.

Aufgabe 54 (4 Punkte)**.** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $u'(t) = \sin(t)u(t)$, $u(0) = 1$,

(b) $u'(t) = -\sin^2(t)u(t)$, $u(0) = 1$.

Aufgabe 55 (4 Punkte)**.** Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (Variation der Konstanten):

(a) $u'(t) = \sin(t)u(t) + t^2 e^{-\cos(t)}$, $u(0) = 1$,

(b) $tu'(t) = 2u(t) + t^2$, $u(1) = 1$.