TU Dortmund SS 2011
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Analysis II
Blatt 3
Abgabe: 26. April 2011, 12:00

Aufgabe 9 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für} \quad x > 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass

$$\lim_{r \to \pm\infty} \frac{e^{r^2}}{|p(r)|} = +\infty$$

für alle Polynome p, die nicht identisch verschwinden.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**. (a)** Zeigen Sie, dass durch

$$\|v\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |v_i|, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert ist (vgl. 2.9 Beispiel).

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x, \quad f \in C^0([a,b]),$$

eine Norm auf $C^0([a,b])$ definiert ist (vgl. 2.10 Beispiel). Beweisen Sie dabei zuerst: Falls $g \ge 0$, $g \in C^0([a,b])$ und

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

so folgt $g(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

Aufgabe 11 (4 Punkte)**. (a)** Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt und $\|\cdot\|$ die induzierte Norm, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$ für $v \in V$. Zeigen Sie dass

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es kein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\|v\|_\infty = \sqrt{v \cdot v}$$

für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 12 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$d_F(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|_2, & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass d_F eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist.