TU Dortmund SS 2011
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Analysis II

Blatt 4

Abgabe: 3. Mai 2011, 12:00

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Skizzieren Sie jeweils den offenen Ball $B\big(\binom{1}{2},1\big) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Abstände, die von den Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ induziert werden sowie für die Metrik d_F aus Aufgabe 12.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.** Versehen Sie $X := \{0,1\}$ mit der durch

$$d(0,1) = 1, \quad d(0,0) = d(1,1) = 0$$

definierten Metrik. Sei $A = B(0,1)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\partial A = \emptyset, \quad \mathrm{int} A = A, \quad \overline{A} = A$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\partial A \neq \{x \in X : d(0,x) = 1\}.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zu (2.26) aus Proposition 2.33?

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** Sei V ein normierter Vektorraum mit mehr als einem Element und sei $A \subset V$. Ein Punkt $x \in A$ heißt *isolierter Punkt*, falls es einen offenen Ball um x gibt, der außer x keine Punkte in A enthält. Zeigen Sie, dass ein isolierter Punkt immer auch ein Randpunkt ist.

Aufgabe 16 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie $X = C^0([0,1])$ mit der Supremumsnorm. Sei $A \subset X$ definiert durch

$$A := \Big\{ f_n : n \in \mathbb{N} \Big\},$$

wobei $f_n(t) := t^n$ sei.

(a) Sei $f \in X$, $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $r > 0$ existiert, so dass

$$B(f,r) \cap (A \setminus \{f\}) = \emptyset$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt aus A isolierter Punkt ist.

(c) Bestimmen Sie

$$\partial A, \quad \mathrm{int} A, \quad \overline{A}.$$

Alternativ zu Aufgabe 16 können Sie die folgende Aufgabe lösen und 4 Bonuspunkte ergattern.

Aufgabe* 16 (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)**.** Betrachten Sie $X = C^0([0,1])$ mit der Supremumsnorm. Sei $A \subset X$ definiert durch

$$A := \Big\{ \frac{1}{m} f_n : m,n \in \mathbb{N} \Big\},$$

wobei $f_n(t) := t^n$ sei.

(a) Sei $f \in X$, $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $r > 0$ existiert, so dass

$$B(f,r) \cap (A \setminus \{f\}) = \emptyset$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Punkt aus A isolierter Punkt ist.

(c) Bestimmen Sie

$$\partial A, \quad \mathrm{int} A, \quad \overline{A}.$$