TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

SS 2011

Analysis II
Blatt 5
Abgabe: 10. Mai 2011, 12:00

Aufgabe 17 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie 2.37: Sei (X, d) metrischer Raum. Dann gilt

(1) Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert.
(2) Konvergente Folgen sind beschränkt.
(3) Falls eine Teilfolge einer Cauchy-Folge konvergiert, so konvergiert die gesamte Folge.
(4) Konvergente Folgen sind Cauchy-Folgen.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie 2.39: Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in V, $x, y \in V$ und gelte

$$x_n \to x,\ y_n \to y \quad (n \to \infty).$$

Sei weiter $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $\mathbb{K}$ mit $\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$. Dann exisitieren die folgenden Grenzwerte und lassen sich wie folgt berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y,$$
$$\lim_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha x,$$
$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = \alpha x.$$

Falls V sogar ein Skalarprodukt-Raum ist, so gilt weiterhin

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = x \cdot y.$$

Aufgabe 19 (4 Punkte)**.** Sei $X = C^0([-1, 1])$ und d die durch $\|\cdot\|_1$ induzierte Metrik (vgl. 2.10). Betrachten Sie

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } -1 \le x \le -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{für } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

(1) Skizzieren Sie f_n.
(2) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in (X, d) ist.
(3) Zeigen Sie, dass $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in [-1, 1]$ existiert.
(4) Zeigen Sie, dass (X, d) nicht vollständig ist.

Aufgabe 20 (4 Punkte)**.** Skizzieren Sie die Mengen

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 2\},$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 2, y \le 3\},$$

und geben Sie jeweils (mit Begründung) an, ob diese offen, abgeschlossen, beschränkt bzw. kompakt sind. Bestimmen Sie außerdem jeweils die abgeschlossene Hülle der Menge.