TU Dortmund SS 2011
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz

Analysis II
Blatt 6
Abgabe: 17. Mai 2011, 12:00

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie 2.50: In $\mathbb{R}^n$ sind endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte von kompakten Mengen wieder kompakt.

Aufgabe 22 (4 Punkte)**.** Sei V ein normierter Vektorraum. Zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ auf V heißen äquivalent, wenn Konstanten $c_A, c_B > 0$ existieren, so dass

$$c_A\|v\|_A \le \|v\|_B \le c_B\|v\|_A \quad \forall v \in V$$

gilt. Zeigen Sie dass alle Normen in $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind.
Tipp: Zeigen Sie, dass jede Norm $\|\cdot\|_A$ stetig in $\mathbb{R}^n$ ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $\|\cdot\|_A$ in $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ Maximum und Minimum annimmt, und folgern Sie daraus, dass $\|\cdot\|_A$ äquivalent zur euklidischen Norm ist und daraus schließlich die Behauptung.

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** **(a)** Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass die durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{4x}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig in $(0,0)$ ist.

(b) Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f(x) := \frac{x}{\|x\|_2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht existiert.

(c) Zeigen Sie mit dem "topologischen Kriterium" aus 3.7 (c), dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ nicht stetig in 0 ist.

Aufgabe 24 (4 Punkte)**.** **(a)** Seien $a, b > 0$. Sei

$$A := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Big(\frac{x}{a}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{b}\Big)^2 = 1\Big\}.$$

Finden Sie eine Parametrisierung $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ von A und skizzieren Sie A. Bestimmen Sie außerdem die Tangenten c' für $x = \frac{a}{2}$.

(b) Sei die Kurve $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spur von γ in Polarkoordinaten gegeben ist durch

$$\Big\{(r,\theta) : r = \sin\theta\tan\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\Big\}.$$

Hinweis: Die Darstellung (r,θ) eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist charakterisiert durch

$$x = r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \quad \text{(vgl. Analysis I, 5.43).}$$