TU DORTMUND SS 2011
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

Analysis II
Blatt 7
Abgabe: 24. Mai 2011, 12:00

Aufgabe 25 (4 Punkte). **(a)** Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$,

$$f(\tau) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\tau}\cos\tau \\ \mathrm{e}^{-\tau}\sin\tau \end{pmatrix}, \tau \in [0,\infty).$$

(b) Parametrisieren Sie die Kurve $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(\tau) := \begin{pmatrix} \tau \\ \cosh\tau \end{pmatrix}, \tau \in [0,1]$$

nach der Bogenlänge. Dabei bezeichnet $\cosh\tau = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\tau} + \mathrm{e}^{-\tau})$ den hyperbolischen Kosinus.

Aufgabe 26 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{cases} (x_1x_2)^{\frac{1}{3}} & \text{für } x_1x_2 \geq 0, \\ -|x_1x_2|^{\frac{1}{3}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung in $\binom{0}{0}$ von f in Richtung $v = \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{R}^2$ nur für $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ existiert.

Aufgabe 27 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{cases} \frac{x_2^3}{x_1^2+x_2^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion f ist stetig in $\binom{0}{0}$.
(b) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\partial_v f\binom{0}{0}$.
(c) Die Abbildung $v \mapsto \partial_v f\binom{0}{0}$ ist nicht linear und f ist in $\binom{0}{0}$ nicht differenzierbar.
(d) Die partielle Ableitung $\partial_2 f$ ist nicht stetig in $\binom{0}{0}$.

Aufgabe 28 (4 Punkte). Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, falls

$$f(tx) = t^{\alpha} f(x) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^n$$

gilt. Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad α. Zeigen Sie, dass dann

$$\partial_x f(x) = \alpha f(x)$$

gilt.