TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Andreas Rätz SS 2011

Analysis II
Blatt 8
Abgabe: 31. Mai 2011, 12:00

Aufgabe 29 (4 Punkte). **(a)** Zeigen Sie, dass in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Satz 2.16 genau dann Gleichheit gilt, wenn die beiden Vektoren linear abhängig sind.

(b) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in U$, $\nabla f(x) \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Gradient von f in Richtung des steilsten Anstiegs von f zeigt: Unter allen $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ wird die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ genau dann maximal, wenn $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ gilt.

Aufgabe 30 (4 Punkte). Zeigen Sie Bemerkung 5.21: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, ist genau dann k-mal stetig partiell differenzierbar, falls f k-mal partiell differenzierbar ist und alle k-ten partiellen Ableitungen stetig sind.

Aufgabe 31 (4 Punkte). Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \text{für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die ersten partiellen Ableitungen von f existieren in jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt) und sind stetig; insbesondere ist f differenzierbar.

(b) In jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ existieren die zweiten partiellen Ableitungen.

(c) Es gilt $\partial_1 \partial_2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq \partial_2 \partial_1 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ Begründen Sie, warum dies kein Widerspruch zum Satz von Schwarz ist.

Aufgabe 32 (4 Punkte). Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Zeigen Sie, dass es keine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ geben kann.
Hinweis: Betrachten Sie die zweiten Ableitungen von f.