TU DORTMUND SS 2011
PROF. DR. MATTHIAS RÖGER
DR. ANDREAS RÄTZ

Analysis II

Blatt 9

Abgabe: 07. Juni 2011, 12:00

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ k-mal stetig differenzierbar, $x \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\{x + tv : t \in [0, 1]\} \subset U$$

bezeichnet $T_{k,x}f(v) := f(x+v) - R_{k+1}(v)$ (siehe Vorlesung, 5.24) die Taylorapproximation k-ten Grades zu f um den Entwicklungspunkt x.

(a) Bestimmen Sie die Taylorapproximation zweiten Grades zu $f : U \to \mathbb{R}$ mit $U = B(0, 1/2) \subset \mathbb{R}^2$ und

$$f(x, y) := \frac{1}{1 - x - y}$$

mit Entwicklungspunkt $(0, 0)$.

(b) Bestimmen Sie die Taylorapproximation zweiten Grades zu $g : U \to \mathbb{R}$ mit $U = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ und

$$g(x, y) := x^y = \mathrm{e}^{y \log x}$$

mit Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Geben Sie ∇f und $D^2 f$ für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, und bestimmen Sie die kritischen Punkte (Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\nabla f(x, y) = 0$ gilt), die lokalen Extrema und die strikten lokalen Extrema von f:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x, y) = \cos x \cosh y$,

(c) $f(x, y) = \sin(xy)$.

Hinweis: Sie können für eine symmetrische Matrix A die folgenden Kriterien verwenden: A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Wie lauten die analogen Kriterien für A ist negativ definit, indefinit, positiv/negativ semidefinit?

Aufgabe 35 (4 Punkte)**.** Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(U)$. Zeigen Sie

(a) Falls f in $x \in U$ ein lokales Maximum hat, so ist $D^2 f(x)$ negativ semidefinit.

(b) Falls f in $x \in U$ ein lokales Minimum hat, so ist $D^2 f(x)$ positiv semidefinit.

Hinweis: Betrachten Sie f entlang Strecken durch x.

Aufgabe 36 (4 Punkte)**.** **(a)** Seien $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $r : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $r(x) := \|x\|$. Zeigen Sie

(i) Es gilt $\Delta(r^{2-n}) = 0$.

(ii) Für $n = 2$ gilt $\Delta(\log r) = 0$.

(b) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(U)$. Seien weiter $x_0 \in U$ und $c \in \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x_0) = c$. Zeigen Sie, dass der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche $N_{f,c} := \{x \in U : f(x) = c\}$ steht.