TU Dortmund
Prof. Dr. Matthias Röger
Dr. Martin Heida SoSem 2012

**EPDG**
Blatt 7
Abgabe: 24. Mai 2012, 13:00

**Aufgabe 25** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Dirichlet-Randwertaufgabe zu $g \in C^2(\partial U)$:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } U \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

nicht für alle offenen beschränkten $U \subset \mathbb{R}^n$ lösbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgaben 17 und 24.

**Aufgabe 26** (4 Punkte)**.** Beweisen Sie: Die Barriereeigenschaft ist hinreichend und notwendig für die Lösbarkeit von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \qquad \text{in } U \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial U \end{aligned}$$

für $g \in C^0(\partial U)$

Hinweis: Zur Konstruktion der Barriere lösen Sie das Dirichlet-Problem für geeignetes $g$.

**Aufgabe 27** (4 Punkte)**.** Die folgende *Méthode de Balayage* geht auf Henri Poincaré zurück. Sei ein beschränktes Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $\{B_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von offenen Bällen mit $\overline{B_i} \subset U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Definiere für $u \in C^0(U)$ die harmonische Ersetzungen $T_i u$ durch

$$(T_i u)(x) \;=\; \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in U \setminus B_i, \\ \int_{\partial B_i} K_i(x,y) u(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y) & \text{für } x \in B_i, \end{cases}$$

wobei $K_i$ den Poissonkern zu $B_i$ bezeichnet (vgl. die Definition vor Satz 42 und Definition 45).

(1) Sei eine subharmonische Funktion $u_0 \in C^0(\bar{U})$ gegeben. Wir definieren dann iterativ eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\bar{U})$ durch

$$u_{k+1} \;=\; (T_{k+1} \circ T_k \circ \ldots \circ T_1) u_k.$$

Zeigen Sie, dass $u_\infty := \lim_{k\to\infty} u_k$ existiert und dass $u_\infty$ harmonisch ist.

(2) Habe nun $U$ zusätzlich die Barriereeigenschaft (vlg. Definition 51). Zeigen Sie, dass $u_\infty$ dann mit der eindeutigen Lösung $u \in C^2(U) \cap C^0(\bar{U})$ des Dirichlet Randwertproblems

$$-\Delta u \;=\; 0 \quad \text{in } U, \qquad u \;=\; u_0 \quad \text{auf } \partial U$$

übereinstimmt.

**Aufgabe 28** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen von Satz 3.2: Es sei $g \in C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\, dy\,.$$

Dann gilt:

(1) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$

(2) $\partial_t u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$