Blatt 1 15.10.10

Übungen zur Vorlesung

Variationsrechnung

Wintersemester 2010/2011

Prof. Dr. M. Röger Agnes Lamacz

1) Alternative Formulierungen des isoperimetrischen Problems.

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes, beschränktes, zusammenhängendes Gebiet, das den isoperimetrischen Quotienten

$$\frac{\big(\text{Inhalt}(G)\big)^{1/2}}{\text{Umfang}(G)}$$

maximiert.

Beweisen Sie:

Unter allen offenen, beschränkten, zusammenhängenden Gebieten mit Inhalt 1 existiert ein Gebiet mit minimalem Umfang.

2) Isoperimetrisches Problem in n Dimensionen.

Man zeige: Es existiert höchstens ein $\alpha > 0$, so dass

$$\sup_G \left\{ \frac{\big(\text{Inhalt}(G)\big)^{\alpha}}{\text{Umfang}(G)} \right\} < \infty,$$

wobei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, zusammenhängend und nichtleer ist.
Bestimmen Sie dieses α.

3) Wirtinger-Ungleichung.

Man beweise die folgende Aussage (Wirtinger-Ungleichung):
Es sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ periodisch mit Periode 2π. Weiterhin gelte $\int_0^{2\pi} f(x)\, dx = 0$.
Dann ist die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\int_0^{2\pi} (f'(x))^2\, dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)\, dx.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$.

Hinweis: Man entwickle f in einer Fourierreihe,

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right).$$

4) Isoperimetrische Ungleichung in der Ebene.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und zusammenhängend. Der Rand von Ω sei eine glatte Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ (nach Bogenlänge parametrisiert) mit Länge L. Man beweise:

$$4\pi A(\Omega) \leq L^2,$$

wobei $A(\Omega)$ den Flächeninhalt von Ω bezeichne.

Anleitung:

1. Man zeige mit dem Satz von Gauss, daß gilt

$$2A(\Omega) \leq \sqrt{L} \left(\int_{\partial\Omega} |x|^2 \, ds \right)^{1/2}$$

2. Man finde eine geeignete Umparametrisierung $\tilde{\gamma}$ von γ und wende die Wirtinger-Ungleichung auf das Integral $\int_{\partial\Omega} |x|^2 \, ds$ an.

Abgabe am 27.10.09 in der Vorlesung.