

Diplomarbeit

**Variationsprobleme und
Liouville-Sätze für
Euler-Gleichungen auf einem Torus**

Andreas Rätz aus Bonn

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT DER
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Referent: Prof. Dr. S. Hildebrandt
Bonn, im November 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Torus-Liouville-Sätze	5
2.1	Formulierung der Liouville-Sätze	5
2.2	Hilfssätze	10
2.3	Beweis von Satz 1	14
2.4	Beweis des Satzes von Avellaneda und Lin	17
3	Minimierer und Homogenisierung	31
3.1	Globale selbstschnittfreie Minimierer	31
3.2	Der autonome Fall	33
3.3	Differenzierbarkeit der mittleren Wirkung	36
4	Heterokline Lösungen	45
4.1	Ein Gegenbeispiel	45
4.2	Lösungen mit periodischen Asymptoten	62
A	Anhang	77
A.1	Beweis von Lemma 5	77
A.2	Satz von Liouville	79

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich in erster Linie mit einem Artikel von Moser und Struwe [MS92] über Liouville-Sätze für lineare und nichtlineare elliptische Differentialgleichungen auf einem Torus. Dabei wird in Kapitel 2 eine lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform

$$\sum_{i,j=1}^n D_{x_i}(a_{ij}(x)D_{x_j}u(x)) = 0$$

mit \mathbb{Z}^n -periodischen Koeffizienten behandelt. Bewiesen wird ein Satz von Avellaneda und Lin [AL89], demzufolge Lösungen dieser Gleichung mit polynomialem Wachstum Polynome mit periodischen Koeffizienten sind. Ein ähnliches Resultat werden wir für linear wachsende Lösungen von nichtlinearen autonomen elliptischen Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n D_{x_i}(F_{p_i}(x, Du(x))) = 0$$

herleiten, wobei $F = F(x, p)$ als \mathbb{Z}^n -periodisch in x und strikt konvex sowie quadratisch wachsend in p vorausgesetzt wird. Die genauen Bedingungen an F und an das Wachstum von u werden im nächsten Kapitel exakt formuliert. Die Beweise dieser Aussagen beruhen hauptsächlich auf Standardabschätzungen für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen (Caccioppoli-Ungleichung, De Giorgi-Moser-Nash-Abschätzungen).

In Kapitel 3 werden selbstschnittfreie globale F -Minimierer ($F = F(x, u, Du) = F(x, u + 1, Du)$) behandelt; das sind Funktionen $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, für die

$$\int_{\mathbb{R}^n} (F(x, u + \varphi, Du + D\varphi) - F(x, u, Du)) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

gilt, und für die $u(x+z) - u(x) - \bar{z}$ für alle $(z, \bar{z}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ festes Vorzeichen hat. Dann werden Resultate von Moser [Mos86b] zitiert, die besagen, daß

jeder selbstschnittfreie globale Minimierer linear beschränkt ist, das heißt, es existiert ein in Anlehnung an die Theorie der Kreis-Homöomorphismen sogenannter Rotationsvektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$, so daß

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x) - \alpha \cdot x| \leq c < \infty, \quad \alpha \cdot x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i,$$

gilt. Geometrisch bedeutet dies, daß der Graph von u eingesperret ist zwischen den Hyperebenen $x_{n+1} = \alpha \cdot x \pm c$. Umgekehrt gibt es zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}^n$ einen selbstschnittfreien globalen Minimierer u , der bezüglich α linear beschränkt ist.

In [Sen91] beweist Senn, daß die mittlere Wirkung

$$\Phi(\alpha) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} F(x, u, Du) dx$$

($B_r = B_r(0)$ sei Kugel um 0 mit Radius r , $|B_r|$ ihr Lebesgue-Maß) eines selbstschnittfreien globalen Minimierers nur von α abhängt, stetig differenzierbar und strikt konvex ist.

Diese drei Resultate werden bewiesen für den autonomen Fall, wobei der Beweis der Differenzierbarkeit von Φ aus [MS92] insofern modifiziert wird, als die Herleitung der Konvergenz der Differenzenquotienten von p bezüglich α ($u(x) = \alpha \cdot x + p(x, \alpha) + \beta$ mit einer in x periodischen Funktion p und einer Konstanten β) mit einer umgekehrten Hölder-Ungleichung erbracht wird. Zusätzlich enthält Abschnitt 3.3 den Beweis der Existenz der zweiten Ableitung und der strikten Konvexität von Φ , der in [MS92] nicht geführt wird.

Im vierten Kapitel wird für $n = 1$ die Energiedichte $F(x, u, u') = \frac{1}{2}(u')^2 + V(x, u)$ sowie die Euler-Gleichung

$$(1.1) \quad u'' = V_u(x, u)$$

behandelt und eine linear wachsende Lösung einer solchen Gleichung konstruiert, für die

$$\frac{u(x)}{x} \rightarrow \alpha_+ \text{ für } x \rightarrow +\infty$$

und

$$\frac{u(x)}{x} \rightarrow \alpha_- \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

mit $\alpha_+ \neq \alpha_-$ gilt. Somit kann diese Lösung nicht linear beschränkt sein, was bedeutet, daß die für den autonomen Fall formulierte Aussage im nicht-autonomen Fall falsch ist und man in der ersten Behauptung in Kapitel 3 nicht von selbstschnittfreien Minimierern zu Lösungen der Euler-Gleichung mit linearem Wachstum übergehen kann. Um eine Lösung mit der oben formulierten Asymptotik zu konstruieren, wird die Beweisidee aus [MS92],

§5, vervollständigt. Dabei wenden wir einen Satz von Mather [Mat91] über diskrete Orbits eines Diffeomorphismus' eines unendlichen Zylinders an und diskutieren den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Euler-Gleichung und den diskreten Orbits der Poincaré-Abbildung des zugehörigen Hamilton-Systems. Hierbei waren die Arbeiten [Ban88], [Den87], [Hua98], [Mos86a], [Mos89], [Mos86c] und [You90] hilfreich.

Ferner wird eine Methode von Rabinowitz [Rab94] vorgestellt, wie man Lösungen der Gleichung (1.1) findet, die für $x \rightarrow -\infty$ eine periodische Lösung und für $x \rightarrow +\infty$ eine andere periodische Lösung als Asymptote hat. Dies kann erreicht werden, indem man ein geeignetes Variationsproblem löst.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Hildebrandt meinen Dank zum Ausdruck bringen, daß er mein Interesse an diesem Thema geweckt hat und Hilfestellungen bei mathematischen Problemen geliefert hat.

Ebenso danke ich Heiko von der Mosel und Daniel Wienholtz für wertvolle Diskussionen und Hinweise.

Außerdem danke ich meinen Eltern und Brüdern für ihre Unterstützung nicht nur während meines Studiums. Weiterhin gilt mein Dank Daniel Habeck und Tobias Preußner für das Korrekturlesen und viele Hilfen bei Problemen mit \TeX sowie Daniel Habeck, Matthias Kurzke, Andreas Paffenholz, Arnold Waßmer und Anja Wille für hilfreiche mathematische Gespräche und für die moralische Unterstützung.

Kapitel 2

Torus-Liouville-Sätze

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Liouville-Sätze formuliert, während in 2.2 die benötigten Ungleichungen (Caccioppoli, De Giorgi, Harnack) aufgestellt und teilweise bewiesen werden. In 2.3 erfolgt dann der Beweis des Satzes, der für die nichtlineare Gleichung $\operatorname{div} F_p(x, Du) = 0$ gilt, und schließlich wird in 2.4 die Aussage von Avellaneda und Lin über Lösungen der linearen Differentialgleichung $\operatorname{div}(ADu) = 0$ gezeigt.

2.1 Formulierung der Liouville-Sätze

Wir betrachten zunächst Lösungen $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ der Gleichung

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^n D_{x_i} F_{p_i}(x, Du(x)) = 0.$$

Dabei möge F die folgenden Bedingungen mit Konstanten $\lambda, \mu, \gamma > 0$ erfüllen:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (i) & \quad F(x, \cdot) \in C^2(\mathbb{R}^n), \\ (ii) & \quad F(x+z, p) = F(x, p) \quad \forall z \in \mathbb{Z}^n, \\ (iii) & \quad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j} \xi_i \xi_j \leq \mu|\xi|^2, \\ (iv) & \quad |F_p(x, 0)| \leq \gamma. \end{aligned}$$

Bezüglich x wird F als meßbar angenommen. Unter diesen Voraussetzungen gilt dann

Satz 1. Falls $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ eine schwache Lösung von (2.1) ist, die die Bedingung linearen Wachstums

$$(2.3) \quad \int_{B_r} u^2 dx := \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u^2 dx \leq cr^2 \quad \text{für } r \geq 1 \quad \text{und ein } c \geq 0$$

erfüllt, so kann sie in der Form

$$(2.4) \quad u(x) = \alpha \cdot x + \beta + p(x, \alpha)$$

dargestellt werden mit einem konstanten Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ und einer periodischen Funktion $p(x, \alpha) = p(x + z, \alpha) \quad \forall z \in \mathbb{Z}^n$, die Hölder-stetig ist mit

$$[p] := \int_{\Omega} p(x, \alpha) dx = 0, \quad \Omega = [0, 1]^n.$$

p ist dabei durch α eindeutig bestimmt.

Der Beweis dieser Aussage erfolgt in Abschnitt 2.3. Hier zeigen wir zunächst die Existenz solcher Lösungen. Zu diesem Zweck minimieren wir das Funktional

$$(2.5) \quad \mathcal{F}(\varphi) := \int_{\Omega} F(x, \alpha + D\varphi) dx, \quad \Omega = [0, 1]^n,$$

in der Klasse der periodischen Funktionen in $H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$. Dazu nutzen wir die Konvexität von F in p aus und erhalten für $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} F(x, p + q) &\geq F(x, p) + F_p(x, p) \cdot q + \frac{\lambda}{2}|q|^2 \\ &\geq F(x, p) - |F_p(x, p)||q| + \frac{\lambda}{2}|q|^2. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung $2|ab| \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$, $\delta > 0$, folgt hieraus

$$(2.6) \quad F(x, p + q) - F(x, p) + c(\epsilon)|F_p(x, p)|^2 \geq \left(\frac{\lambda}{2} - \epsilon\right)|q|^2$$

für beliebiges $\epsilon > 0$. Setzen wir $p := \alpha$ und $q := D\varphi$, so ergibt dies mit $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$$d := \inf_{\varphi \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n)} \mathcal{F}(\varphi) > -\infty.$$

Sei nun $\{\varphi_i\} \subset H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ eine Minimalfolge für \mathcal{F} , also $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_i) = d$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $[\varphi_i] = 0$ für $i \in \mathbb{N}$ gilt, da $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi - [\varphi])$ ist. Daher ergibt die Abschätzung (2.6) in Verbindung mit der Poincaré-Ungleichung die Beschränktheit der Folge $\{\varphi_i\}$ in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$. Es existiert also eine Teilfolge $\{\varphi_i\}$ und eine periodische Funktion $p = p(x, \alpha) \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ mit $\varphi_i \rightharpoonup p$ in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$, $i \rightarrow \infty$. Um zu zeigen, daß p ein Minimierer von \mathcal{F} in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ ist, benötigen wir die schwache Unterhalbstetigkeit bezüglich Folgen in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$. Zu deren Beweis benutzen wir wie zuvor die Konvexität von F . Es gilt für $u_k \rightharpoonup u$ in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u) &= \int_{\Omega} (F(x, \alpha + Du_k) - F(x, \alpha + Du)) dx \\ &\geq \int_{\Omega} F_p(x, \alpha + Du) \cdot (Du_k - Du) dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |Du_k - Du|^2 dx. \end{aligned}$$

Aufgrund der schwachen Konvergenz der u_k und der schwachen Unterhalbstetigkeit des Dirichlet-Integrals folgt daraus wie behauptet

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{F}(u_k) - \mathcal{F}(u)) \geq 0.$$

Somit ergibt sich wegen $p \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$

$$d \leq \mathcal{F}(p) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_i) = d$$

und daher $\mathcal{F}(p) = d$. Bilden wir nun

$$\Phi(\epsilon) := \mathcal{F}(p + \epsilon\varphi), \quad \varphi \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n),$$

so gilt

$$(2.7) \quad 0 = \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Gleichung mit C_c^1 -Funktionen getestet werden kann, daß also p schwache Lösung im herkömmlichen Sinne ist. Sei also $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{supp } \varphi =: K$. Desweiteren möge $\{U_k\}_{k=1, \dots, N}$ eine endliche Überdeckung von K durch offene Mengen U_k mit $\text{diam } U_k < \frac{1}{2}$, $k = 1, \dots, N$, darstellen. Schließlich bezeichne $\{\eta_k\}_{k=1, \dots, N}$ eine Partition der Eins bezüglich dieser Überdeckung. Wenn man nun $\eta_k \varphi$ für jedes $k \in \{1, \dots, N\}$ periodisch fortsetzt - was aufgrund der Schranke für die Durchmesser der U_k möglich ist -, so erhalten wir periodische Testfunktionen ψ_k für (2.7) und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} \psi_k \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{U_k} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} \psi_k \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{U_k} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} (\eta_k \varphi) \, dx. \end{aligned}$$

Summation über k liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{U_k} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} (\eta_k \varphi) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) D_{x_i} \varphi \, dx, \end{aligned}$$

was den Beweis dafür leistet, daß $u(x) := \alpha \cdot x + p(x, \alpha) + \beta$ eine schwache Lösung von (2.1) ist.

Bemerkung 1. Für eine schwache periodische Lösung $u \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ von (2.1) gilt

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} F_{p_i}(x, Du) D_{x_i} \varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in H^{1,2}(\mathbb{T}^n).$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie oben, als wir gezeigt haben, daß, wenn man den Minimierer in die Gleichung einsetzt, auch mit C_c^1 -Funktionen getestet werden kann.

Nun beschäftigen wir uns mit der linearen Differentialgleichung

$$(2.8) \quad \sum_{i,j=1}^n D_{x_i}(a_{ij}(x)D_{x_j}u(x)) = 0$$

mit

$$a_{ij}(x+z) = a_{ij}(x) \quad \forall z \in \mathbb{Z}^n, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

sowie

$$(2.9) \quad \lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ f.ü. .}$$

Weiter sei

$$(2.10) \quad \mathcal{S}^{(N)} := \left\{ u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n) : u \text{ löst (2.8), } \int_{B_r} u^2 \, dx \leq cr^{2N} \quad \forall r \geq 1 \right\}.$$

Dann gilt

Satz 2 (Avellaneda, Lin). (i) Für jede Lösung $u \in \mathcal{S}^{(N)}$ gilt

$$(2.11) \quad u(x) = \sum_{|\nu| \leq N} p_{\nu}(x)x^{\nu},$$

wobei die p_{ν} Hölder-stetige, periodische und für $|\nu| = N$ konstante Funktionen sind.

(ii) $u^{(N)} := \sum_{|\nu|=N} p_{\nu}(x)x^{\nu}$ löst eine elliptische Differentialgleichung

$$(2.12) \quad Qu^{(N)} := \sum_{i,j=1}^n q_{ij}D_{x_i}D_{x_j}u^{(N)} = 0$$

mit konstanten Koeffizienten q_{ij} . Q heißt homogenisierter Operator von (2.8). Eine Lösung von (2.12) heißt Q -harmonisch.

(iii) Bezeichne $\mathcal{H}^{(N)}$ den Raum der Q -harmonischen, homogenen Polynome:

$$(2.13) \quad \mathcal{H}^{(N)} := \{P : P \text{ ist homogenes Polynom, } \deg P \leq N, QP = 0\}.$$

Dann gibt es einen linearen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}^{(N)}$ und $\mathcal{S}^{(N)}$, insbesondere gilt also $\dim \mathcal{S}^{(N)} = \dim \mathcal{H}^{(N)}$.

Bemerkung 2. (i) Für $N = 1$ ist die erste Aussage dieses Satzes ein Spezialfall von Satz 1 mit $F(x, p) = \frac{1}{2}Ap \cdot p$, $A = (a_{ij})$.

(ii) Die in [AL89] geforderte Lipschitz-Stetigkeit der Koeffizienten a_{ij} auf \mathbb{R}^n ist in dem hier geführten Beweis überflüssig.

2.2 Hilfssätze

In diesem Abschnitt werden eine Caccioppoli-Ungleichung für die nicht-lineare Gleichung (2.1) bewiesen sowie im linearen Fall (2.8) punktweise Abschätzungen von de Giorgi und Mosers Harnack-Ungleichung angegeben, aus der eine Oszillationsabschätzung folgt, die einen Liouville-Satz für solche Gleichungen liefert. Die Periodizitätsbedingungen spielen hier keine Rolle.

Lemma 1. *Falls $u \in H^{1,2}(B_R)$ eine schwache Lösung von (2.1) ist, dann gilt für $0 < r < R$ die folgende Ungleichung:*

$$(2.14) \quad \int_{B_r} |Du(x)|^2 dx \leq c_1 \left\{ (R-r)^{-2} \int_{B_R} u^2(x) dx + \gamma^2 |B_R| \right\}$$

mit $c_1 = c_1(\lambda, \mu)$. Desweiteren ist u Hölder-stetig.

Beweis von Lemma 1. Es gilt

$$F_{p_i}(x, p) - F_{p_i}(x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F_{p_i}(x, tp) dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 F_{p_i p_j}(x, tp) p_j dt.$$

Wegen (2.2)(iii) folgt

$$(2.15) \quad p \cdot (F_p(x, p) - F_p(x, 0)) = \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 F_{p_i p_j}(x, tp) p_i p_j dt \geq \lambda |p|^2.$$

Als weitere Konsequenz ergibt sich

$$(2.16) \quad \begin{aligned} |F_p(x, p) - F_p(x, 0)| &= \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_{pp_j}(x, tp) p_j dt \right| = \left| \int_0^1 F_{pp}(x, tp) \cdot p dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |F_{pp}(x, tp) \cdot p| dt \leq \mu |p|. \end{aligned}$$

Bezeichne nun $f = \int_{\mathbb{R}^n}$. Dann testen wir (2.1) mit $\varphi = \eta^2 u$, $\eta \in C_c^1(B_R)$. Daraus folgt

$$\int D\varphi \cdot F_p(x, Du) dx = 0.$$

Wegen (2.2)(iv) gilt dann

$$\int (D(\eta^2 u) \cdot (F_p(x, Du) - F_p(x, 0))) dx \leq \gamma \int |D(\eta^2 u)| dx.$$

Mit der Abschätzung (2.15) ergibt sich daraus mit $p = Du$

$$\begin{aligned} \lambda \int \eta^2 |Du|^2 dx + 2 \int (\eta u D\eta \cdot (F_p(x, Du) - F_p(x, 0))) dx \\ \leq \gamma \int |D(\eta^2 u)| dx. \end{aligned}$$

Ungleichung (2.16) liefert nun

$$(2.17) \quad \lambda \int \eta^2 |Du|^2 dx \leq 2\mu \int |uD\eta| |\eta Du| dx + \gamma \int |D(\eta^2 u)| dx.$$

Wegen

$$2|uD\eta| |\eta Du| \leq \frac{\lambda}{2\mu} |\eta Du|^2 + \frac{2\mu}{\lambda} |uD\eta|^2$$

folgt somit

$$(2.18) \quad \int \eta^2 |Du|^2 dx \leq \frac{1}{\lambda} \left\{ \int \left(\frac{\lambda}{2} \eta^2 |Du|^2 + 2 \frac{\mu^2}{\lambda} |D\eta|^2 u^2 \right) dx + \gamma \int |D(\eta^2 u)| dx \right\}.$$

Nun betrachten wir den letzten Term der Ungleichung. Dabei liefert erneute Anwendung der Abschätzung $2|ab| \leq \delta a^2 + \delta^{-1} b^2$, $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int |D(\eta^2 u)| dx &\leq \int (2|\eta u D\eta| dx + |\eta| |\eta Du|) dx \\ &\leq \frac{\gamma}{\lambda} \int \eta^2 dx + \frac{\lambda}{\gamma} \int |uD\eta|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2\gamma}{\lambda} \int \eta^2 dx + \frac{\lambda}{2\gamma} \int |\eta Du|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Das setzen wir nun in (2.18) ein.

$$\begin{aligned} \int \eta^2 |Du|^2 dx &\leq \frac{1}{2} \int \eta^2 |Du|^2 dx + \left(2 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \frac{\lambda \gamma}{\gamma \lambda} \right) \int |D\eta|^2 u^2 dx \\ &\quad + \frac{\gamma^2}{\lambda^2} (1+1) \int \eta^2 dx + \frac{\gamma \lambda}{\lambda 4\gamma} \int \eta^2 |Du|^2 dx. \end{aligned}$$

Jetzt ist es an der Zeit, η näher zu bestimmen. Wir wählen η mit $\eta(x) \equiv 1$ für $x \in B_r$, $0 \leq \eta(x) \leq 1$ für $x \in B_R$ und $|D\eta| \leq 2(R-r)^{-1}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |Du|^2 dx &\leq \left(8 \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + 4 \right) 4(R-r)^{-2} \int_{B_R} u^2 dx + \frac{8\gamma^2}{\lambda^2} \int_{B_R} dx \\ &\leq c(\mu, \lambda) \left\{ (R-r)^{-2} \int_{B_R} u^2 dx + \gamma^2 |B_R| \right\}. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Hölder-Stetigkeit verweisen wir auf [GT83], Kapitel 8. \square

Lemma 2. Falls $v \in H_{\text{loc}}^{1,2}(B)$, $B_{2r} \subset\subset B \subset \mathbb{R}^n$, eine schwache Lösung von Gleichung (2.8) ist, deren Koeffizienten als meßbar angenommen werden und die gleichmäßige Elliptizitätsbedingung

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2$$

sowie $a_{ij} = a_{ji}$ erfüllen, dann ist v Hölder-stetig und genügt

$$(2.19) \quad \|v^2\|_{L^\infty(B_r)} \leq c_2 \int_{B_{2r}} v^2 dx$$

mit $c_2 = c_2(\frac{\mu}{\lambda})$. Außerdem existiert eine reelle Zahl $\theta = \theta(\frac{\mu}{\lambda}) \in (0, 1)$ mit

$$(2.20) \quad \text{osc}_{B_r} v \leq \theta \text{osc}_{B_{2r}} v.$$

Aus (2.20) ergibt sich leicht der folgende Liouville-Satz:

Bemerkung 3. Ist $v \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Lösung von (2.8), so ist v konstant.

Beweis von Bemerkung 3. Ist $M := \text{osc}_{\mathbb{R}^n} v$, dann folgt aus der Oszillationsabschätzung (2.20) für $r \rightarrow \infty$

$$M \leq \theta M,$$

was nur möglich ist, wenn $M = 0$ gilt. Das wiederum bedeutet, daß v konstant ist. □

Ungleichung (2.19) stammt von de Giorgi (siehe auch [GT83]), während (2.20) auf Moser zurückgeht. Letztere Abschätzung folgt aus der Harnack-Ungleichung für lineare Gleichungen, wie sie in Lemma 2 beschrieben sind. Diese Folgerung soll hier ausgeführt werden. Zunächst formulieren wir jedoch die Harnack-Ungleichung (siehe [Mos61]).

Lemma 3. Sei $v \geq 0$ eine schwache Lösung von (2.8) in B mit $B_{2r} \subset\subset B$. Dann gilt

$$\sup_{x \in B_r} v(x) \leq c \inf_{x \in B_r} v(x).$$

Dabei hängt die Konstante c von n und λ ab.

Definieren wir

$$M(r) := \sup_{x \in B_r} v(x) \quad \text{und} \quad m(r) := \inf_{x \in B_r} v(x),$$

so sind $M(r) - v$ und $v - m(r)$ nichtnegative Lösungen von (2.8), und wir können Lemma 3 anwenden. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} M(2r) - m(r) &= \sup_{x \in B_r} (M(2r) - v(x)) \\ &\leq c \inf_{x \in B_r} (M(2r) - v(x)) = c(M(2r) - M(r)) \end{aligned}$$

und ebenso

$$M(r) - m(2r) \leq c(m(r) - m(2r)).$$

Addition der beiden Ungleichungen liefert

$$M(2r) + M(r) - m(2r) - m(r) \leq c(M(2r) - M(r) + m(r) - m(2r)).$$

Dies ist äquivalent zu

$$M(r) - m(r) \leq \frac{c-1}{c+1} (M(2r) - m(2r)).$$

Wenn wir $\theta := \frac{c-1}{c+1}$ setzen, so folgt die gewünschte Oszillationsabschätzung.

2.3 Beweis von Satz 1

Nun können wir den Beweis von Satz 1 mit den Hilfsmitteln des vorigen Abschnitts führen.

Beweis von Satz 1. Sei $z \in \mathbb{Z}^n$. Mit $u(x)$ ist dann auch $u(x+z)$ eine Lösung von (2.1). Wir definieren $v_k(x) := u(x+e_k) - u(x)$, wobei e_k den k -ten Standardbasisvektor in \mathbb{R}^n bezeichnen möge. Es gilt also für $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (F_{p_i}(x, Du(x+e_k)) - F_{p_i}(x, Du(x))) D_{x_i} \varphi \, dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 \frac{d}{dt} F_{p_i}(x, Du(x) + tDv_k(x)) \, dt D_{x_i} \varphi \, dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 F_{p_i p_j}(x, Du(x) + tDv_k(x)) \, dt D_{x_j} v_k \, D_{x_i} \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$a_{ij}(x) := \int_0^1 F_{p_i p_j}(x, Du(x) + tDv_k(x)) \, dt$$

folgt, daß $v_k(x)$ Lösung einer linearen Differentialgleichung der Form (2.8) mit gleichmäßig elliptischen symmetrischen Koeffizienten ist. Deswegen können wir Lemma 2 anwenden und die Abschätzung

$$\sup_{B_r} v_k^2 \leq c_2 \int_{B_{2r}} v_k^2 \, dx$$

erhalten. Andererseits ist

$$v_k(x) = u(x+e_k) - u(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(x+te_k) \, dt = \int_0^1 D_{x_k} u(x+te_k) \, dt.$$

Zur Rechtfertigung dieser Gleichung sollte man wenigstens $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ annehmen. Allerdings zeigt ein einfaches Approximationsargument, daß das Resultat der folgenden Abschätzungskette für $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ gültig ist. Das Ziel ist nun, zu zeigen, daß v_k beschränkt und somit wegen der Oszillationsabschätzung (2.20) konstant ist. Zunächst soll die L^2 -Norm von v_k

gegen die des Gradienten von u abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \int_{B_{2r}} v_k^2(x) dx &= \sum_{k=1}^n \int_{B_{2r}} \left(\int_0^1 D_{x_k} u(x + te_k) dt \right)^2 dx \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_{B_{2r}} \int_0^1 (D_{x_k} u(x + te_k))^2 dt dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_{B_{2r}} (D_{x_k} u(x + te_k))^2 dx dt \\
&\leq \sum_{k=1}^n \int_0^1 \int_{B_{2r+1}} (D_{x_k} u(x))^2 dx dt \quad (\text{Abb.2.1}) \\
&= \int_{B_{2r+1}} |Du(x)|^2 dx.
\end{aligned}$$

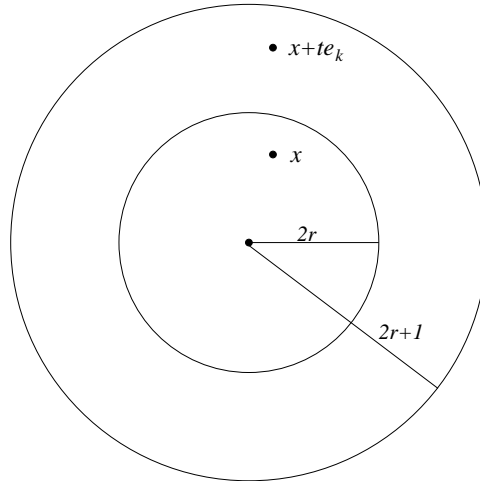


Abbildung 2.1: Konzentrische Kugeln B_{2r} und B_{2r+1}

Es gilt also

$$(2.21) \quad \sup_{B_r} v_k^2 \leq c_2 \frac{1}{|B_{2r}|} \int_{B_{2r+1}} |Du(x)|^2 dx.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung wird nun mit Hilfe von Lemma 1 und der Wachstumsbedingung (2.3) nach oben abgeschätzt.

$$(2.22) \quad \int_{B_{2r+1}} |Du(x)|^2 dx \leq c_1 \left(r^{-2} \int_{B_{3r+1}} u^2(x) dx + \gamma^2 |B_{3r+1}| \right) \leq cr^n.$$

Aus (2.21) und (2.22) erhalten wir wie gewünscht $\sup_{B_r} v_k^2 \leq \text{const}$, d.h. v_k ist unabhängig von r beschränkt. Somit ist v_k als Lösung von (2.8) konstant:

$$v_k(x) \equiv \text{const} =: \alpha_k \quad \text{beziehungsweise} \quad u(x + e_k) - u(x) \equiv \alpha_k.$$

Definieren wir $f_\alpha(x) := u(x) - \alpha \cdot x$, so ergibt sich

$$f_\alpha(x + e_k) = u(x + e_k) - \alpha \cdot (x + e_k) = u(x) + \alpha_k - \alpha \cdot x - \alpha_k = f_\alpha(x),$$

und somit ist f_α periodisch. Nun setzen wir

$$\beta := [f_\alpha] = \int_{\Omega} f_\alpha(x) dx$$

und

$$p(x, \alpha) := f_\alpha(x) - \beta.$$

Dann gilt

$$[p] = 0, \quad p(x + z, \alpha) = p(x, \alpha) \quad \forall z \in \mathbb{Z}^n,$$

$$u(x) = \alpha \cdot x + f_\alpha(x) = \alpha \cdot x + p(x, \alpha) + \beta,$$

und p ist Hölder-stetig, da u als Lösung von Gleichung (2.1) Hölder-stetig ist. p ist dabei eindeutig bestimmt bis auf eine Konstante, die durch die Konvention $[p] = 0$ fixiert werden kann: Angenommen, es existierten zwei periodische Lösungen p und \tilde{p} der Euler-Gleichung

$$\sum_{i=1}^n D_{x_i} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) = 0,$$

so folgte mit der Testfunktion $p - \tilde{p}$ die Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (F_{p_i}(x, \alpha + D_x p) - F_{p_i}(x, \alpha + D_x \tilde{p})) D_{x_i} (p - \tilde{p}) dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \int_{\Omega} F_{p_i p_j}(x, \alpha + t D_x p + (1-t) D_x \tilde{p}) D_{x_j} (p - \tilde{p}) D_{x_i} (p - \tilde{p}) dx dt \\ &\geq \lambda \|D_x p - D_x \tilde{p}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Satz 1 ist also vollständig bewiesen. □

2.4 Beweis des Satzes von Avellaneda und Lin

Der Beweis der ersten Aussage beinhaltet ähnliche Methoden wie der des vorangegangenen Satzes. Da das Wachstum der Lösungen in diesem Fall aber allgemeiner ist, wird hier eine Induktion über die Wachstumsordnung N durchgeführt. Dabei werden allgemeinere Differenzenoperatoren benötigt, die den technischen Aufwand erhöhen.

Beweis von Satz 2.(i) Falls u eine Lösung von (2.8) ist, so gilt dies auch für $v_k(x) = u(x + e_k) - u(x)$. Dieses Verfahren kann wiederholt werden. Sei Δ_i definiert durch

$$\Delta_i \varphi(x) := \varphi(x + e_i) - \varphi(x)$$

und für $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$E^\nu := \prod_{i=1}^n \Delta_i^{\nu_i},$$

so ist also $E^\nu u$ ebenfalls Lösung (2.8) für jedes ν . Es gilt

Lemma 4. $u \in \mathcal{S}^{(N)} \Rightarrow \Delta_i u \in \mathcal{S}^{(N-1)}$, beziehungsweise allgemeiner $E^\nu u \in \mathcal{S}^{(N-|\nu|)}$ für $|\nu| \leq N$.

Beweis von Lemma 4. Für $r \geq 1$ gilt nach Lemma 1

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (\Delta_i u)^2 dx &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_{r+1}} |Du|^2 dx \\ &\leq \frac{c_1}{|B_r|} \left(r^{-2} \int_{B_{2r+1}} u^2 dx + \gamma^2 |B_{2r+1}| \right) \\ &\leq cr^{-n-2+n+2N} = cr^{2(N-1)}. \end{aligned}$$

Die zweite Behauptung von Lemma 4 folgt dann induktiv aus der ersten. \square

Aus Lemma 2 und Lemma 4 erhalten wir für $u \in \mathcal{S}^{(N)}$

$$\sup_{B_r} |E^\nu u| \leq \left(c_2 \int_{B_{2r}} |E^\nu u|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(c_2 c (2r)^{2(N-|\nu|)} \right)^{1/2} = O\left(r^{N-|\nu|}\right).$$

Daher ist für $|\nu| = N$ die Lösung $E^\nu u$ beschränkt und somit konstant, was $E^\nu u = 0$ für $|\nu| > N$ zur Folge hat.

Wir werden nun durch Induktion beweisen, daß jede Funktion u mit $E^\nu u = 0$ für $|\nu| > N$ die Form (2.11) hat.

Falls $\Delta_i v = 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt, so ist v periodisch, was uns den Induktionsanfang liefert.

Wir nehmen nun an, daß für ein $N \in \mathbb{N}$ aus $E^\nu v = 0 \quad \forall |\nu| > N - 1$ die Form (2.11) für v folgte. Sei nun $E^\nu w = 0$ für $|\nu| > N$. Dann gilt für $|\nu| = N$

$$\Delta_i(E^\nu w) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Also ist $E^\nu w$ periodisch:

$$E^\nu w =: \nu! p_\nu$$

mit einer periodischen Funktion p_ν .

Wir behandeln jetzt die Funktion

$$(2.23) \quad v(x) := w(x) - \sum_{|\nu|=N} p_\nu(x) x^\nu.$$

Dann folgt

$$(2.24) \quad E^\nu v = 0 \text{ für alle } \nu \text{ mit } |\nu| > N - 1,$$

wie wir etwas später sehen werden. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann

$$v(x) = \sum_{|\nu| < N} p_\nu(x) x^\nu,$$

und somit erhält man für w die gewünschte Darstellung

$$w(x) = v(x) + \sum_{|\nu|=N} p_\nu(x) x^\nu.$$

Die Koeffizienten höchster Ordnung p_ν , $|\nu| = N$, sind gegeben durch $p_\nu = (\nu!)^{-1} E^\nu u$, und weil $E^\nu u \in \mathcal{S}^{(0)}$ gilt, folgt die Konstanz der p_ν sofort aus der Wachstumsbedingung (2.10), aus (2.19) sowie Bemerkung 3. Bevor wir die Hölder-Stetigkeit der p_ν nachweisen, liefern wir den Beweis von (2.24). Hat man diese Aussage für $|\nu| = N$ bewiesen, so gilt sie auch für $|\nu| \geq N$. Wegen

$$E^\nu v = \left(\prod_{i=1}^n \Delta_i^{\nu_i} \right) (v) = \Delta_n^{\nu_n} (\Delta_{n-1}^{\nu_{n-1}} (\dots (\Delta_1^{\nu_1} v) \dots))$$

und

$$\Delta_i^{\nu_i} v(x) = \sum_{\alpha_i=0}^{\nu_i} \binom{\nu_i}{\alpha_i} (-1)^{\nu_i - \alpha_i} v(x + \alpha_i e_i)$$

gilt

$$E^\nu v(x) = \sum_{\alpha_1=0}^{\nu_1} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\nu_n} \binom{\nu_1}{\alpha_1} \dots \binom{\nu_n}{\alpha_n} (-1)^{|\nu| - |\alpha|} v \left(x + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right).$$

Zu zeigen ist also

$$(2.25) \quad E^\nu \left(\sum_{|\mu|=N} p_\mu(x) x^\mu \right) = E^\nu w(x) = \nu! p_\nu(x).$$

Der linke Term ist gleich

$$\begin{aligned} & \sum_{|\mu|=N} p_\mu(x) E^\nu x^\mu \\ &= \sum_{|\mu|=N} p_\mu(x) \sum_{\alpha_1=0}^{\nu_1} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\nu_n} \binom{\nu_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\nu_n}{\alpha_n} (-1)^{|\nu|-|\alpha|} (x + \alpha)^\mu. \end{aligned}$$

Es reicht also aus,

$$\sum_{\alpha_i=0}^{\nu_i} \binom{\nu_i}{\alpha_i} (-1)^{\nu_i-\alpha_i} (x_i + \alpha_i)^{\mu_i} = \nu_i! \delta_{\nu_i \mu_i}$$

für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\mu_i \leq \nu_i$ zu zeigen. Ist nämlich $\mu_i > \nu_i$ für ein i , so existiert ein Index $j \neq i$ mit $\nu_j > \mu_j$, der dafür sorgt, daß der ganze Summand verschwindet. Das wiederum bedeutet aber, dass wir uns von den lästigen Indizes trennen können. Die letzte Gleichung lautet dann (mit $y := x_i$, $m := \nu_i$, $j := \mu_i$ und $k := \alpha_i$)

$$m! \delta_{mj} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} (y+k)^j = \sum_{l=0}^j y^{j-l} \binom{j}{l} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^l.$$

Beweisen werden wir

Lemma 5.

$$(2.26) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{für } j < m, \\ m! & \text{für } j = m. \end{cases}$$

Der Beweis von (2.26) wird allerdings im Anhang geführt. Also gehen wir dazu über, die Hölder-Stetigkeit der periodischen Funktionen p_ν , $|\nu| \leq N$, nachzuweisen. Wir wissen bereits, daß die p_ν für $|\nu| = N$ konstant sind. Für $|\nu| = N' < N$ gilt aber (siehe (2.25))

$$E^\nu u(x) = E^\nu \left(\sum_{N' < |\mu| \leq N} p_\mu(x) x^\mu \right) + E^\nu \left(\sum_{|\mu|=N'} p_\mu(x) x^\mu \right) = \nu! p_\nu(x).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist als endliche Linearkombination von Hölder-stetigen Funktionen $u(x+z)$, $z \in \mathbb{Z}^N$, Hölder-stetig, und somit

können wir sukzessive die Funktionen p_ν als Hölder-stetig identifizieren. Damit ist auch die Herleitung der ersten Aussage von Satz 2 vollständig.

Die zweite Aussage wird für $N > 2$ wiederum induktiv bewiesen. Das Hauptaugenmerk liegt auf dem Fall $N = 2$. Dabei wird eine vektorwertige Funktion ψ definiert, die die Abhängigkeit der Funktion p von α verdeutlicht und bei der Definition der zum Operator Q gehörenden Matrix benötigt wird.

Beweis von Satz 2.(ii) Die Behauptung ist für $N = 0$ und $N = 1$ trivial, da lineare Funktionen harmonisch sind. Zunächst muss also der Fall $N = 2$ behandelt werden. Dafür sind die folgenden Betrachtungen nötig. Für $N = 0$ sind die Lösungen von (2.8) konstant, während sie im Falle $N = 1$ die Form

$$(2.27) \quad u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j + p(x)$$

haben, wobei p \mathbb{Z}^n -periodisch ist und die Differentialgleichung

$$(2.28) \quad \sum_{i,j=1}^n D_{x_i}(a_{ij}(\alpha_j + D_{x_j}p)) = 0$$

löst. p ist dabei bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Sei ψ_k die periodische Lösung von

$$(2.29) \quad \sum_{i,j=1}^n D_{x_i}(a_{ij}(\delta_{jk} + D_{x_j}\psi_k)) = 0$$

mit $[\psi_k] = 0$, die man durch Minimieren des Funktionals

$$\mathcal{F}_k(\psi) := \int_{\Omega} F_k(x, D\psi) dx, \quad F_k(x, p) := \frac{1}{2} A p \cdot p + \sum_{i=1}^n a_{ik} p_i, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

in $H^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ und durch anschließende Subtraktion des Mittelwertes erhält (siehe Kapitel 2.1). Dann können wir u schreiben als

$$(2.30) \quad u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j + \psi_j(x)) + \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Denn aus (2.29) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij} (\delta_{jk} + D_{x_j} \psi_k)) \\ &= \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} \left(a_{ij} \sum_{k=1}^n (\alpha_k \delta_{jk} + D_{x_j} \alpha_k \psi_k) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} \left(a_{ij} \left(\alpha_j + D_{x_j} \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k \right) \right). \end{aligned}$$

Also ist $\sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k$ eine Lösung von (2.28), und wegen der Eindeutigkeit unterscheidet sie sich von p nur durch eine Konstante $\beta \in \mathbb{R}$. Die Darstellung (2.30) ist somit begründet.

Gleichung (2.29) lautet in Matrixschreibweise

$$(2.31) \quad D_x (A (I + D\psi^T)) = 0,$$

$$[\psi] = 0, \quad \psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \quad A := (a_{ij}).$$

Für $N = 2$ kann jede Lösung von (2.8) folgendermaßen dargestellt werden:

$$(2.32) \quad u(x) = \frac{1}{2} Cx \cdot x + \sum_{k=1}^n p_k(x) x_k + p_0(x)$$

mit einer konstanten, symmetrischen Matrix C und periodischen Funktionen p_0, p_1, \dots, p_n . Es gilt dann

Proposition 1. *Falls eine Funktion der Form (2.32) die Gleichung*

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij} D_{x_j} u) = 0$$

löst, dann erfüllt der Vektor $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ die Gleichung

$$(2.33) \quad p - [p] = C\psi$$

mit ψ aus (2.29). Desweiteren gilt

$$(2.34) \quad \text{tr}(qC^T) = 0, \quad q := [A (I + D\psi^T)].$$

Beweis von Proposition 1. Sei u durch (2.32) gegeben. Dann ist

$$D_{x_j} u(x) = \sum_{k=1}^n c_{kj} x_k + \sum_{k=1}^n x_k D_{x_j} p_k(x) + p_j(x) + D_{x_j} p_0(x).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
Lu(x) &= \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} \left(a_{ij}(x) \sum_{k=1}^n (c_{kj}x_k + x_k D_{x_j} p_k(x)) \right) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij}(x) p_j(x)) + Lp_0(x) \\
&= \sum_{j=1}^n (D_x (A(x) (C^T + Dp(x)^T)))_j x_j + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) (c_{ij} + D_{x_j} p_i(x)) \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij}(x) p_j(x)) + Lp_0(x) \\
&= \sum_{j=1}^n f_j(x) x_j + g(x)
\end{aligned}$$

mit

$$f(x) := D_x (A(x) (C^T + Dp(x)^T))$$

und

$$g(x) := \operatorname{tr} (A(x) (C^T + Dp(x)^T)) + \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (a_{ij}(x) p_j(x)) + Lp_0(x).$$

Offensichtlich sind f und g periodisch. Aus $Lu = 0$ folgt daher $f = g = 0$, denn sei $z \in \mathbb{Z}^n$, dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{j=1}^n f_j(x+z)(x_j+z_j) + g(x+z) \\
&= \sum_{j=1}^n f_j(x)x_j + g(x) + \sum_{j=1}^n f_j(x)z_j = \sum_{j=1}^n f_j(x)z_j.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $f_j = 0 \quad \forall j$, woraus wiederum $g = 0$ folgt.

Aus Gleichung (2.31) erhält man, daß $C\psi$ der Gleichung $f = 0$ genügt. Da p als Lösung von $f = 0$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist und der Mittelwert $[\psi]$ von ψ verschwindet, ergibt sich somit $p - [p] = C\psi$; das war aber die erste Behauptung der Proposition.

Testen wir die Gleichung $g = 0$ mit der konstanten Funktion 1, so erhalten wir

$$0 = \int_{\Omega} \operatorname{tr} (A (C^T + Dp^T)) dx = [\operatorname{tr} (A (C^T + Dp^T))],$$

da die beiden letzten Summanden von g in Divergenzform stehen und somit wegen partieller Integration Null sind.

Mit

$$(2.35) \quad q := [A (I + D\psi^T)]$$

folgt also $\text{tr}(qC^T) = 0$. Damit ist der Beweis der Proposition vollständig. \square

Aus Gleichung (2.31) folgt

$$\int_{\Omega} D\psi A (I + D\psi^T) dx = 0.$$

Mit der Definition von q erhält man daraus

$$(2.36) \quad \int_{\Omega} (I + D\psi) A (I + D\psi^T) dx = q.$$

Aufgrund dieser Darstellung von q sehen wir nun, daß q symmetrisch ist. Außerdem liefert q einen elliptischen Differentialoperator

$$Q := \sum_{i,j=1}^n q_{ij} D_{x_i} D_{x_j}:$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n q_{ij} \xi_i \xi_j &= \sum_{i,j,k,l} \int_{\Omega} b_{il} a_{lk} b_{jk} dx \xi_i \xi_j = \int_{\Omega} \sum_{l,k=1}^n a_{lk} \sum_{i=1}^n b_{il} \xi_i \sum_{j=1}^n b_{jk} \xi_j dx \\ &=: \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \eta_k \eta_l dx \geq \lambda \int_{\Omega} |\eta|^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $B = (b_{ij})$ durch $B := I + D\psi$ und η durch $\eta := B\xi$ gegeben seien. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\eta|^2 dx &= \int_{\Omega} (I + D\psi)\xi \cdot (I + D\psi)\xi dx \\ &= |\xi|^2 + \int_{\Omega} D\psi dx \xi \cdot \xi + \int_{\Omega} D\psi \xi \cdot D\psi \xi dx \geq |\xi|^2, \end{aligned}$$

denn wegen der Periodizität von ψ ist $[D\psi] = 0$, was mit Hilfe des Gaußschen Satzes sofort folgt. Damit ist geklärt, daß der Operator Q elliptisch ist. Q heißt homogenisierter Operator von L .

Aus (2.34) in Proposition 1 folgt nun, daß $u^{(2)}(x) = \frac{1}{2}Cx \cdot x$ die Gleichung $Qu^{(2)} = 0$ erfüllt:

$$Qu^{(2)} = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} D_{x_i} D_{x_j} \sum_{k,l=1}^n \frac{1}{2} c_{kl} x_k x_l = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} c_{ji} = \text{tr}(qC^T) = 0.$$

Also ist die Behauptung für $N = 2$ bewiesen.

Sei nun $N > 2$. Jetzt wird eine Induktion über N durchgeführt. Nehmen wir also an, die Aussage (ii) sei für $N - 1$ richtig. Wegen Lemma 4 ist $\Delta_i u \in \mathcal{S}^{(N-1)}$ für $u \in \mathcal{S}^{(N)}$. Dabei gilt das folgende

Lemma 6. $(\Delta_i u)^{(N-1)} = D_{x_i} u^{(N)}$.

Daraus folgt nun

$$D_{x_i} \left(Qu^{(N)} \right) = Q \left(D_{x_i} u^{(N)} \right) = Q(\Delta_i u)^{(N-1)} = 0,$$

wobei die letzte Gleichung durch die Induktionsannahme begründet ist. $Qu^{(N)}$ ist somit konstant. Da aber $Qu^{(N)}$ homogen vom Grade $N - 2 > 0$ ist, muß $Qu^{(N)} = 0$ gelten. Es fehlt noch der

Beweis von Lemma 6. Sei $u^{(N)}(x) = \sum_{|\nu|=N} p_\nu x^\nu$ mit $p_\nu = \text{const} = (\nu!)^{-1} E^\nu u$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (\Delta_i u)^{(N-1)}(x) &= \sum_{|\nu|=N-1} (\nu!)^{-1} E^\nu (\Delta_i u)(x) x^\nu = \sum_{|\nu|=N-1} (\nu!)^{-1} E^{\nu+e_i} u(x) x^\nu \\ &= \sum_{|\nu|=N, \nu_i > 0} (\nu!)^{-1} \nu_i E^\nu u(x) x^{\nu-e_i} = \sum_{|\nu|=N} (\nu!)^{-1} \nu_i E^\nu u(x) x^{\nu-e_i} \\ &= \sum_{|\nu|=N} p_\nu \nu_i x^{\nu-e_i} = D_{x_i} u^{(N)}(x). \end{aligned}$$

□

Beweis von Satz 2.(iii) Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{S}^{(N)}$ endlichdimensional ist. Die Abbildung $\varphi : \mathcal{S}^{(N)}/\mathcal{S}^{(N-1)} \rightarrow \mathcal{H}^{(N)}/\mathcal{H}^{(N-1)}$, $u \mapsto u^{(N)}$, ist nämlich injektiv für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u^{(N)} = 0 \in \mathcal{H}^{(N)}/\mathcal{H}^{(N-1)} &\Rightarrow u \in \mathcal{S}^{(N-1)} \\ \Rightarrow u = 0 \in \mathcal{S}^{(N)}/\mathcal{S}^{(N-1)} &\Rightarrow \ker \varphi = \{0\}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{S}^{(N)} - \dim \mathcal{S}^{(N-1)} &= \dim \mathcal{S}^{(N)}/\mathcal{S}^{(N-1)} \\ &\leq \dim \mathcal{H}^{(N)}/\mathcal{H}^{(N-1)} = \dim \mathcal{H}^{(N)} - \dim \mathcal{H}^{(N-1)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt induktiv $\dim \mathcal{S}^{(N)} \leq \dim \mathcal{H}^{(N)}$, der Induktionsanfang ist wegen $\mathcal{S}^{(0)} = \mathcal{H}^{(0)}$ trivial. Die Dimension von $\mathcal{H}^{(N)}$ ist offensichtlich endlich.

Um die Existenz eines Isomorphismus zu beweisen, genügt es jetzt also, zu einem gegebenem Q -harmonischen homogenen Polynom h vom Grade N eine Lösung $u \in \mathcal{S}^{(N)}$ mit der Eigenschaft $u^{(N)} = h$ zu konstruieren. Das ist ein Existenzproblem in einem endlichdimensionalen Vektorraum und deswegen ein mehr oder weniger algebraisches Problem (siehe auch [AL89],[BLP78]). Zunächst soll $u \in \mathcal{S}^{(N)}$ umskaliert werden:

$$\epsilon^N u \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = \sum_{|\nu| \leq N} \epsilon^N \left(\frac{x}{\epsilon} \right)^\nu p_\nu \left(\frac{x}{\epsilon} \right) = \sum_{|\nu| \leq N} \epsilon^{N-|\nu|} x^\nu p_\nu \left(\frac{x}{\epsilon} \right).$$

Dieser Ausdruck konvergiert für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen $u^{(N)}(x)$, da für $|\nu| = N$ $p_\nu = \text{const}$ gilt.

Wir betrachten ab jetzt $y = \frac{x}{\epsilon}$ als unabhängige Variable und schreiben

$$(2.37) \quad \begin{aligned} U(x, y, \epsilon) &:= \sum_{|\nu| \leq N} \epsilon^{N-|\nu|} x^\nu p_\nu(y) \\ &= U_0(x) + \epsilon U_1(x, y) + \dots + \epsilon^N U_N(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$U_i(x, y) := \sum_{|\nu|=N-i} x^\nu p_\nu(y), \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

Es wurde also die Variable x aufgespalten in eine „periodische Variable“ y und eine „polynomialen Variable“ x . Wenn wir dann eine Lösung (2.37) der Gleichung

$$(2.38) \quad (\epsilon D_x + D_y)(A(y)(\epsilon D_x + D_y)U(x, y, \epsilon)) = 0$$

haben, so ist $u(x) = \epsilon^{-N} U(\epsilon x, x, \epsilon)$ eine Lösung $u \in \mathcal{S}^{(N)}$ mit $u^{(N)} = U_0$, da

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(x, y, \epsilon) = U_0(x) = u^{(N)}(x)$$

gilt. Anders formuliert heißt (2.38) dann

$$(2.39) \quad (L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2)U = 0$$

mit

$$\begin{aligned} L_0 &:= D_y(A(y)D_y), \\ L_1 &:= D_y(A(y)D_x) + D_x(A(y)D_y), \\ L_2 &:= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y)D_{x_i}D_{x_j}. \end{aligned}$$

Zunächst versuchen wir eine Lösung von (2.39) der Form $U(x, y, \epsilon) = \Psi U_0(x)$ zu finden, wobei

$$(2.40) \quad \Psi := I + \epsilon \Psi_1 + \epsilon^2 \Psi_2 + \dots = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \epsilon^{|\nu|} \psi_\nu(y) D_x^\nu$$

ein Differentialoperator mit periodischen Koeffizienten $\psi_\nu(y)$ sei. Wir müssen uns keine Gedanken über die Konvergenz dieser Reihe machen, da sie nur auf Polynome angewandt wird.

Der erste Versuch wird fehlschlagen, uns aber einen Schritt weiterbringen. Wir haben nun die folgende

Proposition 2. *Es existiert eine eindeutige Reihe Ψ in der Form (2.40) mit $\psi_0 \equiv 1$ und $[\Psi_\nu] = 0$ für $|\nu| \geq 1$, so daß folgendes gilt:*

$$(2.41) \quad (L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2)\Psi = M + (D_y + \epsilon D_x)(A(y)D_y)$$

mit

$$M := \epsilon^2 M_2 + \epsilon^3 M_3 + \dots := \sum_{|\nu| \geq 2} \epsilon^{|\nu|} m_\nu D_x^\nu.$$

Hierbei sind die konstanten Koeffizienten m_ν bestimmt durch

$$m_\nu := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) D_{y_j} \psi_{\nu-e_i}(y) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \psi_{\nu-e_i-e_j}(y) \right) dy.$$

Dabei sei $\psi_\nu := 0$ gesetzt, falls $\nu_i < 0$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$. Außerdem stimmt M_2 mit dem homogenisierten Operator Q überein.

Bemerkung 4. Für den Fall, daß $M_k = 0$, $k \geq 3$, gilt, ist ΨU_0 Lösung von (2.39).

Beweis von Bemerkung 4. Falls $U_0 = U_0(x)$ ein beliebiges homogenes Polynom vom Grade N ist, so gilt nämlich

$$(L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2) \Psi U_0 = M U_0 = \epsilon^2 Q U_0,$$

weil in (2.41) der letzte Term auf ein Polynom angewandt wird, das nur von x abhängt, und somit verschwindet. Falls U_0 also Q -harmonisch ist, ist die rechte Seite in obiger Gleichung gleich Null und

$$\Psi U_0 = U_0 + \dots + \epsilon^N U_N$$

ist die gewünschte Lösung von (2.39). □

Beweis von Proposition 2. Folgende Gleichungen für die mit ϵ^s auftretenden Koeffizienten werden nun aufgestellt:

$$(2.42) \quad \begin{aligned} L_0 &= D_y(A(y)D_y), & s &= 0, \\ L_0 \Psi_1 + L_1 &= D_x(A(y)D_y), & s &= 1, \\ L_0 \Psi_s + L_1 \Psi_{s-1} + L_2 \Psi_{s-2} &= M_s, & s &\geq 2. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist dabei die Definition von L_0 . Die zweite ist äquivalent zu

$$(2.43) \quad L_0 \Psi_1 + D_y(A(y)D_x) = 0.$$

Dabei soll (2.43) folgendermaßen verstanden werden:

$$D_y \left(A(y) D_y \sum_{j=1}^n \psi_j(y) \right) D_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n D_{y_i} a_{ij}(y) D_{x_j} = 0.$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(2.44) \quad 0 = D_y (A(y)(D_y \psi(y))^T) + D_y A(y) = D_y (A(y) ((D_y \psi(y))^T + I)),$$

die man wie in (2.31) lösen kann durch periodische Koeffizienten ψ_j von Ψ_1 , eindeutig, falls man $[\psi_j] = 0$ fordert.

Ebenso können wir die Lösungen Ψ_s für $s \geq 2$ rekursiv erhalten. Die letzte Gleichung von (2.42) ist nämlich äquivalent zu

$$\begin{aligned} L_0 \psi_\nu + \sum_{i,j=1}^n D_{y_i} (a_{ij}(y) \psi_{\nu-e_j}) \\ = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) D_{y_j} \psi_{\nu-e_i}(y) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y) \psi_{\nu-e_i-e_j}(y) + m_\nu, \quad |\nu| = s. \end{aligned}$$

Diese kann man rekursiv lösen, da die Konstanten m_ν gerade so gewählt worden sind, daß die rechte Seite obiger Identität Mittelwert Null hat (vgl. [Aub82], 4.7 Theorem).

In der letzten Gleichung von (2.42) bilden wir das Produkt mit ϵ^s und summieren auf. Dann folgt

$$\begin{aligned} M &= \sum_{s=2}^{\infty} \epsilon^s M_s = \sum_{s=2}^{\infty} \epsilon^s (L_0 \Psi_s + L_1 \Psi_{s-1} + L_2 \Psi_{s-2}) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \epsilon^s (L_0 \Psi_s + \epsilon L_1 \Psi_s + \epsilon^2 L_2 \Psi_s) - (L_0 \Psi_0 + \epsilon L_1 \Psi_0) - \epsilon L_0 \Psi_1. \end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Identitäten von (2.42) erhalten wir nun

$$M = (L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2) \Psi - (D_y (A(y) D_y) + \epsilon D_x (A(y) D_y)),$$

was äquivalent zur ersten Behauptung von Proposition 2 ist.

Jetzt soll gezeigt werden, daß $M_2 = Q$ gilt. Der Differentialoperator Q war definiert durch

$$Q = \sum_{i,j=1}^n q_{ij} D_{x_i} D_{x_j} \quad \text{mit} \quad (q_{ij}) = [A(I + D\psi)].$$

Nun ist $M_2 = \sum_{|\nu|=2} m_\nu D_x^\nu =: \sum_{i,j=1}^n m_{ij} D_{x_i} D_{x_j}$. Für $\nu = e_i + e_j$ gilt dann

$$m_{ij} = m_\nu = \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}(y) D_{y_k} \psi_j(y) + a_{ij}(y) \right) dy = [A(I + D\psi^T)]_{ij} = q_{ij}.$$

Somit ist auch die zweite Behauptung der Proposition bewiesen. \square

Nun ist es an der Zeit, sich mit den Termen M_3, M_4, \dots auseinanderzusetzen. Dazu benötigen wir die folgende

Proposition 3. *Bezeichne \mathcal{P} den Raum der Polynome in x mit reellen Koeffizienten und $\mathcal{P}^{(s)} \subset \mathcal{P}$ den Raum der homogenen Polynome vom Grade s . (Das bedeutet $Q : \mathcal{P}^{(s+2)} \rightarrow \mathcal{P}^{(s)}$ für $s \geq 0$.)*

Dann existiert eine Rechtsinverse $R : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ für den Operator $Q : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, so daß

$$R : \mathcal{P}^{(s)} \rightarrow \mathcal{P}^{(s+2)}, \quad QR = I \text{ gilt.}$$

Beweis von Proposition 3. Wir bestimmen $v \in \mathcal{P}^{(s+2)}$, indem wir für $g \in \mathcal{P}^{(s)}$ das Cauchy-Problem

$$Qv = g, \quad v = D_{x_1}v = 0 \text{ für } x_1 = 0$$

lösen. Wir geben uns dazu die allgemeine Form von Polynomen $g \in \mathcal{P}^{(s)}$ und $v \in \mathcal{P}^{(s+2)}$ vor, berechnen $Qv \in \mathcal{P}^{(s)}$ und erhalten durch Koeffizientenvergleich die Koeffizienten von v . Dabei isolieren wir die erste Koordinate und schreiben $y := (x_2, \dots, x_n)$ und $x = (x_1, y)$ sowie für den Multiindex $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^n$, $\nu = (k, \mu)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu = (\nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{N}_0^{n-1}$. Wir bezeichnen die Koeffizienten der Polynome g und v mit g_ν und v_ν und schreiben also

$$g(x) = \sum_{|\nu|=s} g_\nu x^\nu = \sum_{k=0}^s \sum_{|\mu|=s-k} g_{(k,\mu)} x_1^k y^\mu$$

und

$$v(x) = \sum_{|\nu|=s+2} v_\nu x^\nu = \sum_{k=0}^{s+2} \sum_{|\mu|=s+2-k} v_{(k,\mu)} x_1^k y^\mu.$$

Da $v = D_{x_1}v = 0$ für $x_1 = 0$ gilt, haben wir $v_{(0,\mu)} = v_{(1,\hat{\mu})} = 0$ für alle $|\mu| = s+2$ und alle $|\hat{\mu}| = s+1$. Wenden wir den Differentialoperator Q auf v an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Qv(x) &= q_{11} \sum_{k=2}^{s+2} \sum_{|\mu|=s+2-k} k(k-1) v_{(k,\mu)} x_1^{k-2} y^\mu \\ &+ 2 \sum_{i=2}^n q_{i1} \sum_{k=2}^{s+2} \sum_{|\mu|=s+2-k} k \mu_i v_{(k,\mu)} x_1^{k-1} y^{\mu-e_i} \\ &+ \sum_{i,j \geq 2, i \neq j} q_{ij} \sum_{k=2}^{s+2} \sum_{|\mu|=s+2-k} \mu_i \mu_j v_{(k,\mu)} x_1^k y^{\mu-e_i-e_j} \\ &+ \sum_{i=2}^n q_{ii} \sum_{k=2}^{s+2} \sum_{|\mu|=s+2-k} \mu_i (\mu_i - 1) v_{(k,\mu)} x_1^k y^{\mu-2e_i} \stackrel{!}{=} g(x). \end{aligned}$$

Nun können die Koeffizienten $v_{(k,\mu)}$ sukzessive berechnet werden, da wir $v_{(0,\mu)} = v_{(1,\mu)} = 0$ angenommen haben. Denn wegen $q_{11} > 0$ können wir

für $k = 2, \dots, n$ nacheinander die Koeffizienten $v_{(k,\mu)}$ mit $|\mu| = s + 2 - k$ berechnen, weil alle übrigen Koeffizienten, die im Zusammenhang mit der Potenz x_1^k auftreten, bekannt beziehungsweise durch g gegeben sind. \square

Wegen $R(0) = 0$ kann die Reihe $B := I + \epsilon RM_3 + \epsilon^2 RM_4 + \dots$ definiert werden, und so erhält man

$$(2.45) \quad \epsilon^2 M_2 B = \epsilon^2 M_2 + \epsilon^3 M_3 + \epsilon^4 M_4 + \dots = M.$$

Wir bilden nun die eindeutige formale Inverse

$$B^{-1} = I - \epsilon RM_3 + \epsilon^2 (RM_3)^2 - \epsilon^2 RM_4 + \dots$$

Dann definieren wir für jedes Q -harmonische Polynom $U_0 = U_0(x)$ das Polynom

$$V(x) := B^{-1}U_0(x) = U_0(x) - \epsilon RM_3 U_0(x) + \dots$$

Gleichung (2.45) liefert nun

$$(2.46) \quad MV = \epsilon^2 M_2 BV = \epsilon^2 M_2 U_0 = 0.$$

Also folgt für $U_0 \in \mathcal{H}^{(N)}$, daß die gewünschte Lösung $U = U_0 + \epsilon U_1 + \dots$ von (2.39) gegeben ist durch

$$U = \Psi B^{-1}U_0.$$

Aufgrund von Proposition 2 und der y -Unabhängigkeit von U_0 gilt nämlich

$$(L_0 + \epsilon L_1 + \epsilon^2 L_2)U = MB^{-1}U_0 = MV = 0$$

wegen (2.46). Zu einem vorgegebenen Polynom $h = U_0 \in \mathcal{H}^{(N)}$ wurde somit eine Lösung $U = \Psi B^{-1}U_0$ von (2.39) konstruiert. Wie bereits zu Beginn des Beweises bemerkt ist nun $u(x) = \epsilon^{-N}U(\epsilon x, x, \epsilon) \in \mathcal{S}^{(N)}$ mit $u^N = U_0$. Der Isomorphismus $\Phi : \mathcal{H}^{(N)} \rightarrow \mathcal{S}^{(N)}$ ist also durch $\Phi = \Psi B^{-1}$ gegeben. Damit ist der Beweis von Satz 2 vollständig. \square

Kapitel 3

Minimierer und Homogenisierung

In diesem Kapitel werden zunächst einige Resultate von Moser über globale selbstschnittfreie Minimierer und von Senn über deren mittlere Wirkung (strikte Konvexität) zitiert, bevor diese Ergebnisse im autonomen Fall in den Abschnitten 3.2 und 3.3 bewiesen werden, wobei wir in 3.3 die Differenzierbarkeit und die strikte Konvexität der mittleren Wirkung herleiten.

3.1 Globale selbstschnittfreie Minimierer

Nun wird kurz der Zusammenhang zwischen der Theorie von Minimierern eines Variationproblems

$$(3.1) \quad \int F(x, u, Du) dx$$

und Homogenisierung beschrieben. Wir nehmen also zusätzlich eine Abhängigkeit der Funktion $F = F(x, u, Du)$ von u an, und zwar mit Periode 1. Außerdem mögen die Bedingungen (2.2) erfüllt sein. Darüber hinaus wird ohne Einschränkung $F(x, u, 0) = 0$ angenommen. Wegen

$$\gamma|p| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}|p|^2 + \frac{2}{\lambda}\gamma^2 \right)$$

folgt dann

$$(3.2) \quad \delta_0^{-1}|p|^2 - c_0 \leq F(x, u, p) \leq \delta_0|p|^2 + c_0$$

mit $\delta_0 := \max\{\frac{4}{\lambda}, \frac{1}{2}(\mu + 1)\}$ und $c_0 := \max\{\frac{\gamma^2}{\lambda}, \frac{\gamma^2}{2}\}$. In Mosers Arbeit [Mos86b] wurde die Klasse \mathcal{M} der globalen selbstschnittfreien Minimierer studiert. Das sind Funktionen $u \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, die

$$(3.3) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (F(x, u + \varphi, Du + D\varphi) - F(x, u, Du)) dx \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

erfüllen, und für die

$$(3.4) \quad u(x+z) - \bar{z} - u(x)$$

für alle $z \in \mathbb{Z}^n$ und alle $\bar{z} \in \mathbb{Z}$ festes Vorzeichen hat, d.h. für alle $z \in \mathbb{Z}^n$ und alle $\bar{z} \in \mathbb{Z}$ ist (3.4) entweder überall positiv oder überall negativ oder überall Null. Das Attribut selbstschnittfrei rührt daher, daß die Funktionen (3.4) nicht zu unterscheiden sind, wenn man sie auf dem Torus \mathbb{T}^n betrachtet. Hier werden nun einige Resultate erwähnt.

Satz 3. *F möge die oben genannten Periodizitätsbedingungen sowie (3.2) erfüllen.*

- (i) *Zu jedem $u \in \mathcal{M}$ existiert ein „Rotationsvektor“ $\alpha \in \mathbb{R}^n$, so daß $u(x) - \alpha \cdot x$ beschränkt ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Die Menge dieser Funktionen wird mit \mathcal{M}_α bezeichnet. Für $n = 1$ wird α in Kapitel 4.1 „Rotationszahl“ genannt.*

Zusätzlich soll nun folgendes gelten:

- 1.) *$F \in C^{2,\epsilon}(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^n)$ für ein $\epsilon > 0$.*

- 2.) *Es existiert ein $\delta \in (0, 1)$ mit*

$$\delta |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n F_{p_i p_j}(x, u, p) \xi_i \xi_j \leq \delta^{-1} |\xi|^2.$$

- 3.) *Es gibt eine Zahl $c > 0$, so daß die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} |F_{pu}| + |F_{px}| &\leq c(1 + |p|), \\ |F_{uu}| + |F_{ux}| + |F_{xx}| &\leq c(1 + |p|^2) \end{aligned}$$

gelten.

Dann gilt außerdem:

- (ii) *Zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gibt es einen Minimierer $u \in \mathcal{M}$, so daß $u(x) - \alpha \cdot x$ beschränkt ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Anders ausgedrückt: $\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$.*
- (iii) *Für alle Minimierer $u \in \mathcal{M}_\alpha$ ist die (minimale) mittlere Wirkung*

$$(3.5) \quad \Phi(\alpha) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B_r} F(x, u, Du) dx$$

definiert und unabhängig von der Wahl von $u \in \mathcal{M}_\alpha$. Darüber hinaus ist $\Phi(\alpha)$ strikt konvex.

Die Beweise der beiden ersten Aussagen sind in [Mos86b] zu finden, während die dritte Aussage in [Sen91] bewiesen wird.

Zur physikalischen Interpretation von $\Phi(\alpha)$ sei erwähnt, daß in [Mat89] $\Phi(\alpha)$ die mittlere Wirkung von Teilchen eines Hamilton-Systems mit durchschnittlichen Impuls α darstellt. In einer Arbeit von Aubry und Le Dae-ron [ALD83] wird ein diskretes Modell für ein eindimensionales Kristall behandelt. Dabei wird das Gitter beschrieben durch Folgen $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, wobei man sich die benachbarten Teilchen mit Indizes i und $i + 1$ durch ein Federpotential $\frac{1}{2}C(x_{i+1} - x_i)^2$, $C > 0$, verbunden vorstellen kann. Außerdem wirken auf die Teilchen Kräfte $-V'(x_i)$ eines periodischen Potentials $V(\xi) = V(\xi + 1)$. Dann entspricht α dem mittleren Atomabstand und $\Phi(\alpha)$ der mittleren Energie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=-n}^n H(x_k, x_{k-1}), \quad H(\xi, \eta) := \frac{1}{2}C(\xi - \eta)^2 + V(\xi) + V(\eta),$$

der schwingenden Atome.

3.2 Der autonome Fall

Eine wesentlich einfachere Gestalt nehmen die Aussagen aus Satz 3 an im Fall, daß $F = F(x, Du)$ unabhängig von u ist.

Satz 4. (i) Falls $F_u = 0$ gilt, ist jede Lösung von (2.1) minimal im Sinne von (3.3).

(ii) \mathcal{M} stimmt mit der Menge der Lösungen (2.4) von (2.1) mit linearem Wachstum überein.

(iii) Für die mittlere Wirkung Φ gilt

$$(3.6) \quad \Phi(\alpha) = \int_{\Omega} F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx, \quad \Omega = [0, 1]^n.$$

Dabei wird $p = p(x, \alpha)$ durch (2.4) definiert.

(iv) Im linearen Fall $F(x, Du) = \frac{1}{2}A(x)Du(x) \cdot Du(x)$ gilt

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2}q\alpha \cdot \alpha,$$

wobei q die Matrix (2.35) des zu $L = D_x(AD_x)$ homogenisierten Operators Q ist.

Diese Behauptungen sollen nun bewiesen werden.

Beweis von Satz 4. (i) Wegen (2.2) gilt für $q \in \mathbb{R}^n$

$$F(x, p + q) \geq F(x, p) + F_p(x, p) \cdot q + \frac{\lambda}{2} |q|^2.$$

Daraus folgt für $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (F(x, Du + D\varphi) - F(x, Du)) dx \geq \frac{\lambda}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |D\varphi|^2 dx \geq 0,$$

falls u schwache Lösung von (2.1) ist. Dies liefert die erste der vier Behauptungen.

(ii) Falls $u \in \mathcal{M}$ gilt, so haben die Funktionen (3.4) und somit auch $v_k(x) = u(x + e_k) - u(x)$ festes Vorzeichen oder sind gleich Null. Andererseits löst v_k eine lineare Differentialgleichung der Form (2.8), und nach der Harnack-Ungleichung in Lemma 3 ist v_k beschränkt und wegen (2.20) in Lemma 2 konstant. Wie zuvor im Beweis von Satz 1 folgt nun, daß u die Form (2.4) hat.

Ist umgekehrt u Lösung von (2.1), so ist u Minimierer des Funktionals laut (i). Außerdem folgt aus der Form (2.4), daß für $z \in \mathbb{Z}^n$ und $\bar{z} \in \mathbb{Z}$ die Identität

$$u(x + z) - \bar{z} - u(x) = \alpha \cdot z - \bar{z} \equiv \text{const}$$

gilt, was $u \in \mathcal{M}$ liefert.

(iii) Sei $W := [0, 1]^n$ sowie $\tau_k W := W - k := \{w - k : w \in W\}$ für $k \in \mathbb{Z}^n$ der um k verschobene Würfel im \mathbb{R}^n . Weiterhin definieren wir

$$\hat{B}_\rho := \bigcup_{k \in J_\rho} \tau_k W \quad \text{mit} \quad J_\rho := \{k \in \mathbb{Z}^n : \tau_k W \cap B_\rho \neq \emptyset\}.$$

Dann überdecken die Würfel $\{\tau_k W, k \in J_\rho\}$ den Ball B_ρ , und es gilt

$$(3.7) \quad |\hat{B}_\rho| = \sum_{k \in J_\rho} |\tau_k W| = |J_\rho|,$$

wobei mit $|J_\rho|$ die Anzahl der Elemente in J_ρ bezeichnet sei. Die Raumdiagonale im Einheitswürfel hat die Länge \sqrt{n} , weswegen sich

$$\bar{B}_{\rho - \sqrt{n}} \subset \hat{B}_{\rho - \sqrt{n}} \subset \bar{B}_\rho \subset \hat{B}_\rho \subset \bar{B}_{\rho + \sqrt{n}}$$

ergibt. Ferner gilt

$$\frac{|\hat{B}_\rho - B_\rho|}{|B_\rho|} = \frac{|\hat{B}_\rho| - |B_\rho|}{|B_\rho|} \leq \frac{(\rho + \sqrt{n})^n - \rho^n}{\rho^n} = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

für $\rho \rightarrow \infty$. Ebenso folgt

$$\frac{|\hat{B}_\rho - \hat{B}_{\rho - \sqrt{n}}|}{|B_\rho|} = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

für $\rho \rightarrow \infty$. Damit erhalten wir für die periodische Funktion $f(x) := F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))$

$$\frac{1}{|\hat{B}_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} f \, dx = \frac{1}{|J_\rho|} |J_\rho| \int_W f \, dx = \int_\Omega F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \, dx$$

und

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f \, dx - \int_\Omega f \, dx \right| &= \left| \frac{1}{|B_\rho|} \int_{B_\rho} f \, dx - \frac{1}{|\hat{B}_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} f \, dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{|B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} f \, dx - \frac{1}{|B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho - B_\rho} f \, dx - \frac{1}{|\hat{B}_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} f \, dx \right| \\ &\leq \frac{1}{|B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho - B_\rho} |f| \, dx + \frac{|\hat{B}_\rho| - |B_\rho|}{|\hat{B}_\rho| |B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} |f| \, dx \\ &\leq \frac{1}{|B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho - \hat{B}_{\rho - \sqrt{n}}} |f| \, dx + \frac{|\hat{B}_\rho| - |B_\rho|}{|\hat{B}_\rho| |B_\rho|} \int_{\hat{B}_\rho} |f| \, dx \\ &= \left(\frac{|\hat{B}_\rho - \hat{B}_{\rho - \sqrt{n}}|}{|B_\rho|} + \frac{|\hat{B}_\rho - B_\rho|}{|B_\rho|} \right) \int_\Omega |f| \, dx \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $\rho \rightarrow \infty$. Insgesamt liefern diese Abschätzungen die Behauptung (3.6).
(iv) In Kapitel 2 hatten wir für u die Darstellung (2.30)

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j + \psi_j(x)) + \beta$$

gefunden. Bildung des Gradienten liefert

$$Du = (I + D\psi)\alpha.$$

Für die Matrix q hatte sich in (2.36)

$$q = \int_\Omega (I + D\psi)A(I + D\psi^T) \, dx$$

ergeben. Im linearen Fall $F(x, Du) = \frac{1}{2}A(x)Du \cdot Du$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \int_\Omega \frac{1}{2}A(x)Du \cdot Du \, dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2}(A(x)(I + D\psi)\alpha) \cdot ((I + D\psi)\alpha) \, dx = \frac{1}{2}q\alpha \cdot \alpha. \end{aligned}$$

□

3.3 Differenzierbarkeit der mittleren Wirkung

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß die Differenzenquotienten der mittleren Wirkung Φ konvergieren. Dabei werden Differenzenquotienten w von p bezüglich α auftreten. Diese Funktionen w werden elliptische Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten lösen, und mit Hilfe einer umgekehrten Hölder-Ungleichung kann man dann zeigen, daß die Differenzenquotienten von p in $H^{1,2}(\Omega)$ konvergieren.

Das Funktional

$$\int_{\Omega} \Phi(Dv) dx,$$

das man erhält, wenn man α durch den Gradienten der unbekannteten Funktion v ersetzt, führt auf die homogenisierte Euler-Gleichung

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^n D_{x_i} \Phi_{\alpha_i}(Dv) = 0.$$

Im linearen Fall war nach Satz 4 (iv)

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2} q \alpha \cdot \alpha.$$

Daher lautet (3.8) dann

$$0 = \sum_{i=1}^n D_{x_i} \Phi_{\alpha_i}(Dv) = \sum_{i,j=1}^n D_{x_i} (q_{ij} D_{x_j} v) = Qv.$$

Im nichtlinearen Fall gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha_i}(\alpha) &= D_{\alpha_i} \int_{\Omega} F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} F_{p_j}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) (\delta_{ij} + D_{\alpha_i} D_{x_j} p(x, \alpha)) dx \\ &= [F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))] \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} F_{p_j}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) D_{\alpha_i} D_{x_j} p(x, \alpha) dx. \end{aligned}$$

Nun ist $u(x) = \alpha \cdot x + p(x, \alpha)$ Lösung der Gleichung (2.1), und wegen der Periodizität von p darf man $D_{\alpha_i} p$ als Testfunktion für (2.1) verwenden. Deswegen verschwindet in obiger Gleichung der zweite Term der rechten Seite. Folglich hat (3.8) nun die Gestalt

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^n D_{x_i} \int_{\Omega} F_{p_i}(\xi, Dv + D_x p(\xi, Dv)) d\xi = 0.$$

Um obige Rechnung zu rechtfertigen, müssen wir gewährleisten, daß $D_x p$ differenzierbar von α abhängt, wenigstens in einer gewissen Sobolew-Topologie. Dazu bemerken wir zunächst, daß aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1 die Abbildung $\alpha \mapsto p(\cdot, \alpha)$ wohldefiniert ist. Wir zeigen nun die folgende

Proposition 4. *Es gilt $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit*

$$\Phi_\alpha(\alpha) = [F_p(x, \alpha + D_x p(\alpha, x))],$$

und es existieren die zweiten partiellen Ableitungen.

Beweis von Proposition 4. Wenn wir Differenzenquotienten in Gleichung (2.1) betrachten, so ergibt dies für festes $j \in 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n D_{x_i} \left\{ \frac{F_{p_i}(x, \alpha + h e_j + D_x p(x, \alpha + h e_j)) - F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))}{h} \right\} \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n D_{x_i} \left\{ F_{p_i}(x, \alpha + h e_j + D_x p(x, \alpha + h e_j)) \right. \\ &\quad \left. - F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha + h e_j)) + F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha + h e_j)) \right. \\ &\quad \left. - F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \right\} \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n D_{x_i} \int_0^1 \frac{d}{dt} F_{p_i}(x, \alpha + t h e_j + D_x p(x, \alpha + h e_j)) dt \\ &\quad + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^n D_{x_i} \int_0^1 \frac{d}{dt} F_{p_i}(x, \alpha + t D_x p(x, \alpha + h e_j) + (1-t) D_x p(x, \alpha)) dt. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$(3.10) \quad w^{(h)}(x) := \frac{p(x, \alpha + h e_j) - p(x, \alpha)}{h},$$

dann erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n D_{x_i} \left(\int_0^1 F_{p_i p_j}(x, \alpha + t h e_j + D_x p(x, \alpha + h e_j)) dt \right) \\ &\quad + \sum_{i,k=1}^n D_{x_i} \left(\int_0^1 F_{p_i p_k}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha) + t h D_x p(x, \alpha + h e_j)) dt D_{x_k} w^{(h)}(x) \right). \end{aligned}$$

Somit erfüllt $w^{(h)}$ die elliptische Differentialgleichung

$$(3.11) \quad - \sum_{i,k=1}^n D_{x_i} \left(b_{ik}^{(h)} D_{x_k} w^{(h)} \right) = \sum_{i=1}^n D_{x_i} b_i^{(h)}$$

mit

$$b_{ik}^{(h)}(x) := \int_0^1 F_{p_i p_k}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha) + th D w^{(h)}(x)) dt$$

sowie

$$b_i^{(h)}(x) := \int_0^1 F_{p_i p_j}(x, \alpha + the_j + D_x p(x, \alpha + he_j)) dt.$$

Wegen (2.2) gilt für die symmetrische Matrix $b_{ij}^{(h)}$ die Elliptizitätsbedingung (2.9) unabhängig von h . Außerdem gilt $|b_i^{(h)}| \leq \mu$ gleichmäßig in h . Durch Testen von (3.11) mit $w^{(h)}$ folgt nun

$$\begin{aligned} \lambda \left\| D w^{(h)} \right\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 &\leq \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} b_{ik}^{(h)} w_{x_i}^{(h)} w_{x_k}^{(h)} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} b_i^{(h)} w_{x_i}^{(h)} dx \\ &\leq \mu \left\| D w^{(h)} \right\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Also ist $w^{(h)}$ beschränkt in $H^{1,2}(\Omega)$ wegen der Poincaré-Ungleichung unter Berücksichtigung von $[w^{(h)}] = 0$. Daraus folgt sofort, daß

$$(3.12) \quad \left\| h w^{(h)} \right\|_{H^{1,2}(\Omega)} = \|p(x, \alpha + he_j) - p(x, \alpha)\|_{H^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt.

Es soll nun bewiesen werden, daß $\{D w^{(h)}\}$ eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ist. Dazu testen wir Gleichung (3.11) mit $w^{(h)} - w^{(l)}$ und erhalten somit:

$$\begin{aligned} &\lambda \left\| D w^{(h)} - D w^{(l)} \right\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} b_{ik}^{(h)} \left(w_{x_i}^{(h)} - w_{x_i}^{(l)} \right) \left(w_{x_k}^{(h)} - w_{x_k}^{(l)} \right) dx \\ &= - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(b_i^{(h)} - b_i^{(l)} \right) \left(w_{x_i}^{(h)} - w_{x_i}^{(l)} \right) dx \\ &\quad + \sum_{i,k=1}^n \left(\int_{\Omega} b_{ik}^{(l)} w_{x_i}^{(l)} \left(w_{x_k}^{(h)} - w_{x_k}^{(l)} \right) dx - \int_{\Omega} b_{ik}^{(h)} w_{x_i}^{(h)} \left(w_{x_k}^{(h)} - w_{x_k}^{(l)} \right) dx \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| b_i^{(h)} - b_i^{(l)} \right| \left| w_{x_i}^{(h)} - w_{x_i}^{(l)} \right| dx \\ &\quad + \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right| \frac{1}{2} \left(\left(w_{x_k}^{(h)} \right)^2 + \left(w_{x_k}^{(l)} \right)^2 + 2 \left(w_{x_i}^{(l)} \right)^2 \right) dx \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| b_i^{(h)} - b_i^{(l)} \right| \left| w_{x_i}^{(h)} - w_{x_i}^{(l)} \right| dx \\ &\quad + 2 \sum_{i,k=1}^n \int_{\Omega} \left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right| \left(\left| D w^{(l)} \right|^2 + \left| D w^{(h)} \right|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Wir werden jetzt diese Terme mit einer umgekehrten Hölder-Ungleichung abschätzen. Die Differentialgleichung (3.11) ist nämlich von der Form (2.1) mit

$$F(x, p) = Bp \cdot p + p \cdot b \quad \text{mit} \quad B = (b_{ij}), \quad b = (b_i).$$

Dabei sind die Bedingungen aus (2.2) unabhängig von h erfüllt. Deswegen können wir den Beweis der Caccioppoli-Ungleichung (2.14) auf diese Situation übertragen und erhalten somit

$$\int_{Q_r} |Dw^{(h)}|^2 dx \leq k_1 \left(\frac{1}{r^2} \int_{Q_{2r}} |w^{(h)} - w_{2r}^{(h)}|^2 dx + r^n \right).$$

Dabei mögen k_1 - wie auch die k_i , $i = 2, \dots, 6$, im folgenden - eine Konstante und $Q_r := Q_r(x_0)$ einen Würfel um x_0 mit Kantenlänge $2r$ sowie $w_{2r}^{(h)}$ den Mittelwert

$$w_{2r}^{(h)} := \int_{Q_{2r}} w^{(h)}(x) dx$$

von $w^{(h)}$ bezeichnen.

Anwendung der Sobolew-Poincaré-Ungleichung ([Gia83], Chap. 5) im Fall $n \geq 2$

$$\int_{Q_{2r}} |w^{(h)} - w_{2r}^{(h)}|^2 dx \leq k_2 \left(\int_{Q_{2r}} |Dw^{(h)}|^\rho dx \right)^{2/\rho}, \quad \rho = \frac{2n}{n+2},$$

liefert die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{Q_r} |Dw^{(h)}|^2 dx &\leq k_3 \left(\frac{r^{-n+\frac{2}{\rho}n}}{r^2} \left(\int_{Q_{2r}} |Dw^{(h)}|^\rho dx \right)^{2/\rho} + 1 \right) \\ &= k_3 \left(\left(\int_{Q_{2r}} |Dw^{(h)}|^\rho dx \right)^{2/\rho} + 1 \right). \end{aligned}$$

Für $n = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{Q_{2r}} |w^{(h)} - w_{2r}^{(h)}|^2 dx &\leq k_4 \left\| w^{(h)} - w_{2r}^{(h)} \right\|_{H^{1,1}(Q_{2r})}^2 \\ &= k_4 \left(\left\| w^{(h)} - w_{2r}^{(h)} \right\|_{L^1(Q_{2r})} + \left\| Dw^{(h)} \right\|_{L^1(Q_{2r}, \mathbb{R}^n)} \right)^2 \\ &\leq k_5 \left((r+1) \left\| Dw^{(h)} \right\|_{L^1(Q_{2r}, \mathbb{R}^n)} \right)^2. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Caccioppoli-Ungleichung ergibt sich somit für $n = 1$

$$\int_{Q_r} |Dw^{(h)}|^2 dx \leq k_6 \left(\frac{(r+1)^2}{r} \left(\int_{Q_{2r}} |Dw^{(h)}| dx \right)^2 + 1 \right).$$

Diese Ungleichung sichert uns das angekündigte Resultat (siehe [Gia83]):

Satz 5 (Umgekehrte Hölder-Ungleichung). Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Würfel. Desweiteren mögen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- (i) $g \geq 0$, $g \in L^\tau(Q)$, $\tau > 1$; $f \geq 0$, $f \in L^{\tau'}(Q)$, $\tau' > \tau$ und
- (ii) für alle $x_0 \in Q$ und alle R mit $0 < R < \min(\text{dist}(x_0, \partial Q), R_0)$ gilt

$$(3.13) \quad \int_{Q_{R/2}(x_0)} g^\tau dx \leq b \left(\int_{Q_R(x_0)} g dx \right)^\tau + \int_{Q_R(x_0)} f^\tau dx + \theta \int_{Q_R(x_0)} g^\tau dx$$

mit Konstanten $b > 1$, $R_0 > 0$, $0 \leq \theta < 1$.

Dann existieren $\epsilon > 0$ und $C > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

$g \in L_{\text{loc}}^\sigma(Q) \quad \forall \sigma \in [\tau, \tau + \epsilon)$, und für alle $Q_R \subset Q$, $R < R_0$, gilt

$$(3.14) \quad \left(\int_{Q_{R/2}} g^\sigma dx \right)^{1/\sigma} \leq C \left\{ \left(\int_{Q_R} g^\tau dx \right)^{1/\tau} + \left(\int_{Q_R} f^\sigma dx \right)^{1/\sigma} \right\}.$$

C und ϵ hängen dabei von b , θ , n , τ , τ' ab; Q_R und $Q_{R/2}$ werden als konzentrisch vorausgesetzt.

Wir wenden dieses Resultat im Fall $n \geq 2$ an auf $g = |Dw^{(h)}|^{\frac{2n}{n+2}}$, $\tau = \frac{n+2}{n}$, $f = b$, $\theta = 0$ und $\Omega \subset\subset Q$. Wegen der Periodizität der $w^{(h)}$ gilt für genügend großes $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\| Dw^{(h)} \right\|_{L^2(Q, \mathbb{R}^n)} \leq k \left\| Dw^{(h)} \right\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq \text{const.}$$

Somit erhalten wir $g = |Dw^{(h)}|^{\frac{2n}{n+2}} \in L_{\text{loc}}^\sigma(Q)$ für $\sigma \in [\frac{n+2}{n}, \frac{n+2}{n} + \epsilon)$; mit anderen Worten haben wir $|Dw^{(h)}| \in L_{\text{loc}}^p(Q)$ für ein $p \in [2, 2 + \frac{2n}{n+2}\epsilon)$, und die entsprechende Abschätzung ist unabhängig von h . Ebenso folgt für $n = 1$, daß $|Dw^{(h)}| \in L_{\text{loc}}^p(Q)$ ist mit einer möglicherweise anderen Zahl p . In jedem Fall gilt

$$(3.15) \quad \left\| Dw^{(h)} \right\|_{L^p(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq \text{const} \quad \text{für ein } p > 2.$$

Nun können wir damit fortfahren, die L^2 -Normen von $Dw^{(h)} - Dw^{(l)}$ abzuschätzen. Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right| \left| Dw^{(h)} \right|^2 dx \\ \leq \left(\int_{\Omega} \left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right|^{q'} dx \right)^{1/q'} \left(\int_{\Omega} \left(\left| Dw^{(h)} \right|^2 \right)^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Dabei mögen q durch $q := p/2$ und q' durch $1/q + 1/q' = 1$ definiert sein. Es genügt also, die folgende Behauptung zu beweisen:

$$(3.16) \quad \int_{\Omega} \left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right|^{q'} dx \rightarrow 0 \quad \text{für } h, l \rightarrow 0 \quad \text{und } i, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Wie bereits zuvor gezeigt wurde, gilt $hDw^{(h)} \rightarrow 0$ in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Demnach existiert eine Teilfolge von $\{hDw^{(h)}\}$, die punktweise fast überall gegen Null konvergiert. Wegen $F_{p_i p_k}(x, \cdot) \in C^0(\mathbb{R}^n)$ konvergieren dann die $F_{p_i p_k}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha) + thDw^{(h)})$ punktweise fast überall. Damit konvergiert also eine Teilfolge der Koeffizienten $b_{ik}^{(h)}$ gegen $b_{ik}(x) := F_{p_i p_k}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))$ punktweise fast überall. Dies gilt auch für Potenzen $\left(b_{ik}^{(h)}\right)^{q'}$. Desweiteren gilt $\left(b_{ik}^{(h)}\right)^{q'} \in [\lambda^{q'}, \mu^{q'}]$ gleichmäßig in h . Somit liefert Vitalis Konvergenzsatz

$$\left| b_{ik}^{(h)} - b_{ik}^{(l)} \right|^{q'} \rightarrow 0 \quad \text{in } L^1(\Omega) \quad \text{für } h, l \rightarrow 0.$$

Da dies aber für jede konvergente Teilfolge gilt, konvergiert die gesamte Folge $b_{ik}^{(h)}$ in $L^{q'}$. Wenn man alle übrigen Terme in der Ungleichung für $\lambda \|Dw^{(h)} - Dw^{(l)}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2$ (siehe Seite 38) ebenso abschätzt, erhält man, daß $Dw^{(h)}$ ein Cauchy-Folge in $L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und somit $w^{(h)}$ eine Cauchy-Folge in $H^{1,2}(\Omega)$ ist.

Daraus erhalten wir die exakte Begründung dafür, daß die mittlere Wirkung $\Phi(\alpha)$ so abgeleitet werden konnte, wie wir das getan haben. Wir hatten (3.6) hergeleitet:

$$\Phi(\alpha) = \int_{\Omega} F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx.$$

Somit gilt für den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi(\alpha + he_j) - \Phi(\alpha)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega} (F(x, \alpha + he_j + D_x p(x, \alpha + he_j)) - F(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega} F_p(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \cdot he_j dx \\ & \quad + \frac{1}{h} \int_{\Omega} F_p(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \cdot (D_x p(x, \alpha + he_j) - D_x p(x, \alpha)) dx + R(h) \end{aligned}$$

mit

$$R(h) := \frac{1}{h} \int_{\Omega} F_{pp}(x, \xi) \left(he_j + hDw^{(h)} \right) \cdot \left(he_j + hDw^{(h)} \right) dx,$$

wobei $\xi = \xi(x) \in \mathbb{R}^n$ eine geeignete Zwischenstelle ist. Das Restglied kann nun fgendermaßen abgeschätzt werden.

$$|R(h)| \leq \frac{\mu}{|h|} h^2 \int_{\Omega} \left| e_j + Dw^{(h)} \right|^2 dx = O(|h|),$$

da $w^{(h)}$ in $H^{1,2}(\Omega)$ beschränkt ist. Desweiteren gilt

$$\int_{\Omega} F_p(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \cdot (D_x p(x, \alpha + he_j) - D_x p(x, \alpha)) dx = 0,$$

denn $p(x, \alpha + he_j) - p(x, \alpha)$ ist eine periodische Testfunktion für die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n D_{x_i} F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) = 0.$$

Für den Grenzwert des Differenzenquotienten ergibt sich damit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\alpha + he_j) - \Phi(\alpha)}{h} = \int_{\Omega} F_{p_j}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx.$$

Als nächstes soll die Stetigkeit der partiellen Ableitungen gezeigt werden. In (3.12) haben wir bereits die Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| h D w^{(h)} \right\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} = \lim_{h \rightarrow 0} \| D_x p(x, \alpha + he_i) - D_x p(x, \alpha) \|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} = 0$$

für $i = 1, \dots, n$ nachgewiesen. Für die partiellen Ableitungen

$$\Phi_{\alpha_j}(\alpha) = \int_{\Omega} F_{p_j}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx$$

bedeutet dies wiederum

$$\begin{aligned} & \left| \Phi_{\alpha_j}(\alpha + he_i) - \Phi_{\alpha_j}(\alpha) \right| \\ & \leq \mu \int_{\Omega} |he_i + D_x p(x, \alpha + he_i) - D_x p(x, \alpha)| dx \\ & \leq \mu \left(\int_{\Omega} |he_i + D_x p(x, \alpha + he_i) - D_x p(x, \alpha)|^2 dx \right)^{1/2} \\ & \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Also sind die ersten Ableitungen stetig.

Schließlich soll noch bewiesen werden, daß auch die zweiten Ableitungen

existieren. Dazu bilden wir wie gehabt die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{\alpha_i}(\alpha + he_j) - \Phi_{\alpha_i}(\alpha)}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_{\Omega} (F_{p_i}(x, \alpha + he_j + D_x p(x, \alpha + he_j)) - F_{p_i}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha))) dx \\ &= \int_{\Omega} \int_0^1 F_{p_i p_j} \left(x, \alpha + the_j + thDw^{(h)} + D_x p(x, \alpha) \right) dt dx \\ & \quad + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \int_0^1 F_{p_i p_k} \left(x, \alpha + the_j + thDw^{(h)} + D_x p(x, \alpha) \right) dt D_{x_k} w^{(h)} dx. \end{aligned}$$

Dabei sind die Funktionen $w^{(h)}$ die in (3.10) definierten Differenzenquotienten von $p = p(x, \alpha)$, welche in $H^{1,2}(\Omega)$ für $h \rightarrow 0$ konvergieren; die Grenzfunktion wird mit $D_{\alpha_j} p$ bezeichnet. Für die zweiten Ableitungen folgt somit

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha_i \alpha_j}(\alpha) &= \int_{\Omega} F_{p_i p_j}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) dx \\ & \quad + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} F_{p_i p_k}(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) p_{x_k \alpha_j} dx. \end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die strikte Konvexität der mittleren Wirkung $\Phi(\alpha)$ zu beweisen.

Proposition 5. $\Phi = \Phi(\alpha)$ ist strikt konvex.

Beweis von Proposition 5. Wir zeigen, daß die Weierstraßsche E -Funktion

$$E(\alpha_1, \alpha_2) := \Phi(\alpha_2) - \Phi(\alpha_1) - D\Phi(\alpha_1) \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$$

positiv definit ist. Es gilt

$$\begin{aligned} E(\alpha_1, \alpha_2) &= \int_{\Omega} F(x, \alpha_2 + D_x p(x, \alpha_2)) dx - \int_{\Omega} F(x, \alpha_1 + D_x p(x, \alpha_1)) dx \\ & \quad - \int_{\Omega} F_p(x, \alpha_1 + D_x p(x, \alpha_1)) dx \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &\geq \int_{\Omega} F_p(x, \alpha_1 + D_x p(x, \alpha_1)) \\ & \quad \cdot (\alpha_2 + D_x p(x, \alpha_2) - \alpha_1 - D_x p(x, \alpha_1)) dx \\ & \quad + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\alpha_2 + D_x p(x, \alpha_2) - \alpha_1 - D_x p(x, \alpha_1)|^2 dx \\ & \quad - \int_{\Omega} F_p(x, \alpha_1 + D_x p(x, \alpha_1)) dx \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \frac{\lambda}{2} \|\alpha_2 + D_x p(x, \alpha_2) - \alpha_1 - D_x p(x, \alpha_1)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 \geq 0, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\int_{\Omega} F_p(x, \alpha + D_x p(x, \alpha)) \cdot (D_x p(x, \alpha_2) - D_x p(x, \alpha_1)) dx = 0,$$

weil man die Differentialgleichung mit $p(x, \alpha_2) - p(x, \alpha_1)$ testen kann. Es folgt also

$$E(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \Leftrightarrow \|\alpha_2 + D_x p(x, \alpha_2) - \alpha_1 - D_x p(x, \alpha_1)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)} = 0,$$

was äquivalent zu

$$\alpha_2 \cdot x + p(x, \alpha_2) - \alpha_1 \cdot x - p(x, \alpha_1) = \text{const}$$

ist. Dies wiederum tritt genau dann ein, wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, was die strikte Konvexität liefert.

□

Kapitel 4

Heterokline Lösungen der Euler-Gleichung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden für $n = 1$ eine Lagrange-Funktion und eine Lösung der zugehörigen Euler-Gleichung im nichtautonomen Fall konstruiert, die zwar lineares Wachstum hat, für die es aber keine lineare Funktion gibt, von der sie sich nur um eine beschränkte Funktion unterscheidet.

In 4.2 liefert ebenfalls für $n = 1$ und eine bestimmte Klasse von Lagrange-Funktionen ein geeignetes Variationsproblem die Existenz einer Lösung der Euler-Gleichung, die für $t \rightarrow -\infty$ und für $t \rightarrow +\infty$ unterschiedliche periodische Funktionen als Asymptoten hat.

4.1 Ein Gegenbeispiel

In Satz 1 hatten wir festgestellt, daß Lösungen u von

$$\operatorname{div} F_p(x, Du) = 0$$

mit linearem Wachstum die Gestalt

$$u(x) = \alpha \cdot x + p(x, \alpha) + \beta,$$

haben, falls F die Bedingungen (2.2) erfüllt.

In Kapitel 3.1 wurde bemerkt, daß es im nichtautonomen Fall $F = F(x, u, Du)$ zu jedem globalen Minimierer u ohne Selbstüberschneidungen einen Vektor $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x) - \alpha \cdot x| < \infty$ gilt. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß es Lösungen der Euler-Gleichung

$$\operatorname{div} F_p(x, u, Du) = F_u(x, u, Du)$$

mit linearem Wachstum $u = O(|x|)$ gibt, für die aber $u(x) - \alpha \cdot x$ unbeschränkt ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$.

Das Beispiel wird für $n = 1$ konstruiert. An dieser Stelle werden die Bezeichnungen geändert: x geht über in t , u in x sowie Du in \dot{x} .

Wir behandeln die Lagrange-Funktion

$$L(t, x, \dot{x}) := \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(t, x)$$

mit einem periodischen Potential $V \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ mit $V(-t, x) = V(t, x)$, das später genauer definiert wird. Das führt auf die Euler-Gleichung

$$(EG) \quad \ddot{x} = V_x(t, x)$$

beziehungsweise auf das Hamilton-System

$$(HS) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= y = H_y(t, x, y) \\ \dot{y} &= V_x(t, x) = -H_x(t, x, y) \end{aligned}$$

mit der Hamilton-Funktion

$$H(t, x, y) := \frac{1}{2}y^2 - V(t, x).$$

Ziel ist der folgende

Satz 6. *Bei geeigneter Wahl des Potentials V existiert eine Lösung von (EG) mit*

$$\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_+ \quad \text{für } t \rightarrow +\infty$$

und

$$\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_- \quad \text{für } t \rightarrow -\infty$$

mit $\alpha_+ \neq \alpha_-$.

Daraus würde die angekündigte Eigenschaft folgen, daß es kein $\alpha \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $x(t) - \alpha t$ beschränkt auf ganz \mathbb{R} ist.

Beweis von Satz 6. Die gewünschte Aussage folgt leicht aus einem Resultat von Mather [Mat91] über endliche Kompositionen von flächentreuen, orientierungserhaltenden Twist-Abbildungen des unendlichen Zylinders, die die Enden erhalten und jedes Ende unendlich drehen sowie $\beta > 0$ als gleichmäßige untere Schranke für den Twist haben. Diese Eigenschaften werden für die Poincaré-Abbildung von (HS) in der folgenden Proposition nachgeprüft. Um den Satz von Mather anwenden zu können, müssen wir sicherstellen, daß es für den Zylinder-Diffeomorphismus einen instabilen Birkhoff-Ring gibt, also eine kompakte Teilmenge des Zylinders, deren Randkomponenten geschlossene invariante Kurven sind und die keine weiteren geschlossenen invarianten Kurven enthält. Entscheidend wird sein, daß eine geschlossene invariante Kurve in Zusammenhang steht mit einer minimalen Blätterung für die Euler-Gleichung (EG).

Sei nun $\Phi(t, t_0, x_0, y_0) = (\phi, \psi)(t, t_0, x_0, y_0)$ der Fluß von (HS). Dann gilt

Proposition 6. (i) Für genügend großes $N \in \mathbb{N}$ sind die Abbildungen

$$\Phi_i(x, y) := \Phi\left(\frac{i}{N}, \frac{i-1}{N}, x, y\right), i = 1, \dots, N,$$

Twist-Diffeomorphismen, das heißt, für

$$(x', y') := (\phi_i(x, y), \psi_i(x, y)) := \Phi_i(x, y)$$

gilt $\frac{\partial \phi_i}{\partial y} > 0$. Außerdem ist $\frac{\partial x'}{\partial y} > \tan \beta$ und $\frac{\partial x}{\partial y} < -\tan \beta$ für ein $\beta > 0$. Geometrisch bedeutet dies, daß jede vertikale Gerade unter Φ_i auf eine Kurve abgebildet wird, die mit jeder vertikalen Gerade einen Winkel α bildet, der größer als $\beta > 0$ ist, entsprechend lautet die geometrische Interpretation der zweiten Ungleichung für Φ_i^{-1} .

(ii) Es gelten die Periodizitätsbedingungen

$$\phi_i(x+1, y) = \phi_i(x, y) + 1, \quad \psi_i(x+1, y) = \psi_i(x, y).$$

Dies bedeutet, daß die Φ_i als Lifts von Diffeomorphismen $\hat{\Phi}_i : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$, $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, des unendlichen Zylinders auf sich verstanden werden: Es gilt $\pi \circ \Phi_i = \hat{\Phi}_i \circ \pi$, wobei $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ die Projektion sein möge.

(iii) Die Φ_i sind flächentreu: $\det D\Phi_i = 1$ (Satz von Liouville). Insbesondere sind diese Abbildungen orientierungserhaltend.

(iv) Für $(x', y') := \Phi_i(x, y)$ ist die wegen (iii) geschlossene 1-Form $y'dx' - ydx$ auch exakt: Es existiert also eine C^1 -Funktion $h = h(x, x')$ mit $dh = y'dx' - ydx$.

(v) Für $i = 1, \dots, N$ gilt

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y) &\rightarrow \infty \quad \text{für } y \rightarrow \pm\infty, \\ \phi_i(x, y) &\rightarrow \infty \quad \text{für } y \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Bemerkung 5. Die Poincaré-Abbildung $\Phi = \Phi(x, y) = \Phi_N \circ \Phi_{N-1} \circ \dots \circ \Phi_1(x, y)$ ist endliche Komposition von Abbildungen Φ_i , die die fünf Eigenschaften aus der obigen Proposition erfüllen. Ab jetzt bezeichnet $\Phi = \Phi(x, y)$ die Poincaré-Abbildung und $\hat{\Phi}$ deren Projektion auf den Zylinder $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$.

Beweis von Proposition 6.(i) (vgl. [Hua98]) Sei $b := \|V\|_{C^2(\mathbb{R}^2)}$. Die gewünschte Ungleichung wird bewiesen für $\Phi(\delta, 0, x_0, y_0)$ und

$0 < \delta < \frac{1}{2}b^{-1/2}$. Dazu nehmen wir an, es existierten zwei Lösungen $(x(t), y(t))$ und $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ von (HS) mit den Anfangswerten $x(0) = x_0 = \bar{x}(0)$, $y(0) = y_0 < \bar{y}_0 = \bar{y}(0)$. Dann beweisen wir für $t \in [0, \delta]$ die Ungleichung

$$(4.1) \quad \frac{1}{2}(\bar{y}_0 - y_0) \leq \bar{y}(t) - y(t) \leq \frac{3}{2}(\bar{y}_0 - y_0).$$

Dazu definieren wir $u(t) := \bar{x}(t) - x(t)$ und $v(t) := \bar{y}(t) - y(t)$. Dann erhalten wir wegen $u(0) = 0$

$$u(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

sowie

$$v(t) = v(0) + \int_0^t (V_x(\tau, \bar{x}(\tau)) - V_x(\tau, x(\tau))) d\tau.$$

Sei nun $\bar{\delta} \in [0, \delta]$ beliebig, so daß $v(t) > 0$ ist für alle $t \in [0, \bar{\delta}]$. Dann ergibt sich für $t \in [0, \bar{\delta}]$

$$\begin{aligned} & \int_0^t |V_x(\tau, \bar{x}(\tau)) - V_x(\tau, x(\tau))| d\tau \\ & \leq \int_0^t \int_0^1 |V_{xx}(\tau, \sigma \bar{x}(\tau) + (1 - \sigma)x(\tau))u(\tau)| d\sigma d\tau \leq b \int_0^t |u(\tau)| d\tau \\ & = b \int_0^t \left| \int_0^\tau v(\sigma) d\sigma \right| d\tau \leq b \int_0^t \int_0^\tau |v(\sigma)| d\sigma d\tau \leq b\bar{\delta} \int_0^t |v(\sigma)| d\sigma. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(4.2) \quad v(0) - b\bar{\delta} \int_0^t v(\sigma) d\sigma \leq v(t) \leq v(0) + b\bar{\delta} \int_0^t v(\sigma) d\sigma.$$

Somit liefert Gronwalls Lemma die Ungleichung

$$v(t) \leq v(0)e^{b\bar{\delta}t} \quad \text{für } t \in [0, \bar{\delta}],$$

und wir können $v(t)$ weiter nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} v(t) & \geq v(0) - v(0) \int_0^t b\bar{\delta}e^{b\bar{\delta}\sigma} d\sigma \\ & = v(0) - v(0) \left(e^{b\bar{\delta}t} - 1 \right) = v(0) \left(2 - e^{b\bar{\delta}t} \right). \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq t \leq \bar{\delta} \leq \delta < \frac{1}{2}b^{-1/2}$ gilt

$$e^{b\bar{\delta}t} \leq e^{b\bar{\delta}^2} \leq e^{b\delta^2} \leq e^{1/4} \leq \frac{3}{2},$$

weswegen wie gewünscht

$$\frac{1}{2}v(0) = \left(2 - \frac{3}{2}\right)v(0) \leq v(t) \leq \frac{3}{2}v(0)$$

allerdings für $t \in [0, \bar{\delta}]$ gilt. Nun ist es aber offensichtlich, daß diese Ungleichung (4.1) dann auch für $t \in [0, \delta]$ richtig ist. Integration von (4.1) liefert

$$\frac{t}{2}(\bar{y}_0 - y_0) \leq \bar{x}(t) - x(t) \leq \frac{3t}{2}(\bar{y}_0 - y_0),$$

woraus

$$\frac{t}{2} \leq \frac{\bar{x}(t) - x(t)}{\bar{y}_0 - y_0} \leq \frac{3t}{2}$$

folgt. Also gilt

$$\frac{\partial\phi(\delta, 0, x_0, y_0)}{\partial y_0} \geq \frac{\delta}{2}.$$

Außerdem liefert (4.1)

$$\frac{\bar{y}(t) - y(t)}{\bar{y}_0 - y_0} \leq \frac{3}{2},$$

und somit folgt

$$\frac{\partial\psi(\delta, 0, x_0, y_0)}{\partial y_0} \leq \frac{3}{2},$$

was

$$\tan \alpha = \frac{\partial x'_0}{\partial y'_0} = \frac{\partial\phi(\delta, 0, x_0, y_0)}{\partial y_0} \left(\frac{\partial\psi(\delta, 0, x_0, y_0)}{\partial y_0} \right)^{-1} \geq \frac{\delta}{2} \frac{2}{3} = \frac{\delta}{3} > \tan \beta$$

nach sich zieht, wenn wir $0 < \beta < \arctan \frac{\delta}{3}$ wählen. Setzen wir $N := \lfloor 2b^{1/2} \rfloor + 1$, so erhalten wir also die gewünschte Ungleichung. Ebenso kann man die Abschätzungen für $\frac{\partial x}{\partial y}$ erhalten, wenn man in Betracht zieht, daß das Potential $V = V(t, x)$ symmetrisch in der Zeitvariablen ist.

(ii) ist wegen der Periodizität des Potentials klar.

(iii) Der Beweis des Satzes von Liouville wird auf den Anhang verschoben.

(iv) Die gewünschte C^1 -Funktion $h_i = h_i(x, x')$ kann wegen (i) als

$$h_i(x, x') = \int_{(i-1)/N}^{i/N} \left(\frac{1}{2}y^2(t) + V(t, x(t)) \right) dt$$

angegeben werden, wobei $(x(t), y(t))$ die eindeutige Lösung von (HS) mit $x((i-1)/N) = x$ und $x(i/N) = x'$ sei. Denn es gilt

$$\frac{\partial h_i}{\partial x} = -y \quad \text{und} \quad \frac{\partial h_i}{\partial x'} = y',$$

wie man durch partielle Integration unter Verwendung der Differentialgleichung leicht nachrechnet.

(v) Diese Eigenschaften folgen sofort aus der Beschränktheit der Ableitung von V und aus den Identitäten

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t V_x(\tau, x(\tau)) d\tau$$

und

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t y(\tau) d\tau,$$

wobei $(x(t), y(t))$ die Lösung von (HS) mit $x(t_0) = x_0$ und $y(t_0) = y_0$ sein möge und $t_0 := \frac{i-1}{N}$ sowie $t := \frac{i}{N}$ für $i = 1, \dots, N$ gesetzt seien. \square

Die gewünschte Lösung von (EG) soll mit Hilfe einer Arbeit von Mather [Mat91] gefunden werden, die sich mit endlichen Kompositionen von Abbildungen beschäftigt, die die Eigenschaften (i) – (v) aus Proposition 6 haben. Bevor wir die Aussage formulieren können, benötigen wir jedoch einige Definitionen.

Definition 1. Sei $\mathcal{C} := S^1 \times \mathbb{R}$ und $\hat{\Phi} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ die Projektion der Poincaré-Abbildung auf \mathcal{C} . Dann heißt eine Kurve $\Gamma \subset \mathcal{C}$ $\hat{\Phi}$ -invarianter Kreis, falls Γ $\hat{\Phi}$ -invariant, homöomorph zu einem Kreis und nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist.

Für solche Kurven gilt der

Satz 7. Sei Γ ein $\hat{\Phi}$ -invarianter Kreis in \mathcal{C} . Dann ist Γ Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion w .

In der Regel werden wir unter einem $\hat{\Phi}$ -invarianten Kreis Γ den Graph einer Lipschitz-stetigen periodischen Funktion w in der Überlagerung des Zylinders verstehen und dafür keine andere Bezeichnung verwenden. Der Beweis von Satz 7 geht auf Birkhoff zurück und kann in [Mat91](Appendix 1) gefunden werden. Da $\hat{\Phi}|_{\Gamma}$ für einen invarianten Kreis Γ einen S^1 -Homöomorphismus liefert, existiert der Grenzwert

$$\rho(\Gamma) := \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(\Phi^k(x, y))}{k}, \quad \pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_1(x, y) = x,$$

und ist unabhängig von $(x, y) \in \Gamma$. Wir haben also die folgende

Definition 2.

$$\rho(\Gamma) := \lim_{|k| \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(\Phi^k(x, y))}{k}$$

heißt *Rotationszahl* von Γ .

Die Rotationszahl ist der mittlere Rotationswinkel der Abbildung $\hat{\Phi}$ auf Γ .

Proposition 7. Sei Γ $\hat{\Phi}$ -invarianter Kreis und $(x_0, y_0) \in \Gamma$ beliebig. Dann ist die Lösung x von (EG) mit $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = y_0$ (globaler) Minimierer (zur Lagrange-Funktion L) mit Rotationszahl α , falls $\alpha = \rho(\Gamma)$ ist, das heißt, $x \in \mathcal{M}_\alpha$, denn für $n = 1$ sind Minimierer selbstschnittfrei ([Den87], Theorem 2.5).

Diese Aussage erhält man, wenn man Lemma 2.3 aus [Hua98] mit Proposition 2.8 aus [Mat91] kombiniert.

Weiterhin sind die invarianten Kreise nach ihrer Rotationszahl sortiert:

Proposition 8. Seien Γ_1 und Γ_2 $\hat{\Phi}$ -invariante Kreise und $\alpha_1 := \rho(\Gamma_1) > \rho(\Gamma_2) =: \alpha_2$, sowie $\Gamma_i = \{(x, w_i(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. Dann gilt $w_1(x) > w_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis von Proposition 8. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann sind nach Proposition 7 die Lösungen $x_i(t)$ von (EG) mit $x_i(0) = x_0$, $\dot{x}_i(0) = w_i(x_0)$, $i = 1, 2$, minimal, also $x_i \in \mathcal{M}_{\alpha_i}$ für $i = 1, 2$. Daraus folgt nach Kapitel 3.1

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |x_i(t) - \alpha_i t| < \infty.$$

Also muß für genügend großes $t > 0$ $x_1(t) > x_2(t)$ sowie $x_1(t) < x_2(t)$ für genügend kleines $t < 0$ gelten. Nun gilt aber das folgende

Lemma 7. Zwei verschiedene Minimierer schneiden sich höchstens einmal. Desweiteren berühren sie sich niemals tangentiell.

Deswegen gilt $x_1(t) > x_2(t)$ für alle $t > 0$ und $x_1(t) < x_2(t)$ für alle $t < 0$. Daraus folgt aber wegen der zweiten Aussage des Lemmas, daß $\dot{x}_1(0) > \dot{x}_2(0)$ und somit auch $w_1(x_0) > w_2(x_0)$ gelten muß. □

Beweis von Lemma 7. (vgl. [Den87]) Seien x und \bar{x} verschiedene Minimierer mit $x(t_1) = \bar{x}(t_1)$ und $x(t_2) = \bar{x}(t_2)$ für $t_1 < t_2$, $x(t) < \bar{x}(t)$ auf (t_1, t_2) . Ferner mögen t_1 und t_2 in einem offenen Intervall $I = (a, b)$ liegen, das ansonsten keine Schnittpunkte von x und \bar{x} enthält (Abbildung 4.1).

Dann bilden wir $x_* := \min(x, \bar{x})$ und $x^* := \max(x, \bar{x})$ und erhalten mit

$$\mathcal{L}(x) := \mathcal{L}(x, I) := \int_a^b L(t, x, \dot{x}) dt$$

die Ungleichungen

$$(4.3) \quad \mathcal{L}(x_*) \geq \mathcal{L}(\bar{x}) \quad \text{und} \quad \mathcal{L}(x^*) \geq \mathcal{L}(x),$$

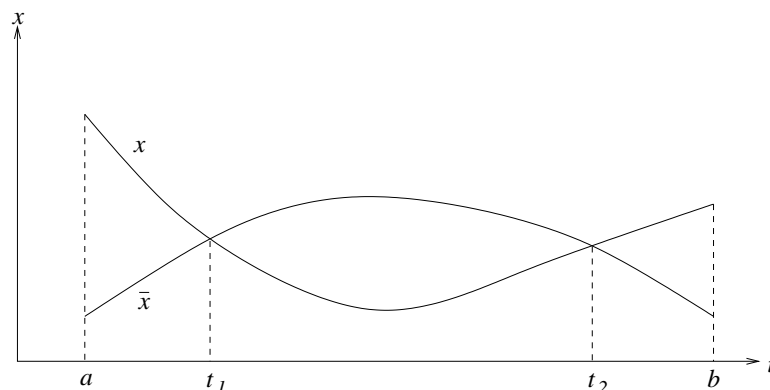


Abbildung 4.1: Zwei Minimierer mit zwei Schnittpunkten

weil x globaler Minimierer ist. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_*) + \mathcal{L}(x^*) &= \int_a^{t_1} (L(t, x, \dot{x}) + L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})) dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} (L(t, x, \dot{x}) + L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})) dt \\ &\quad + \int_{t_2}^b (L(t, x, \dot{x}) + L(t, \bar{x}, \dot{\bar{x}})) dt = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(\bar{x}), \end{aligned}$$

weswegen die erste Ungleichung von (4.3)

$$\mathcal{L}(\bar{x}) + \mathcal{L}(x^*) \leq \mathcal{L}(x_*) + \mathcal{L}(x^*) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(\bar{x})$$

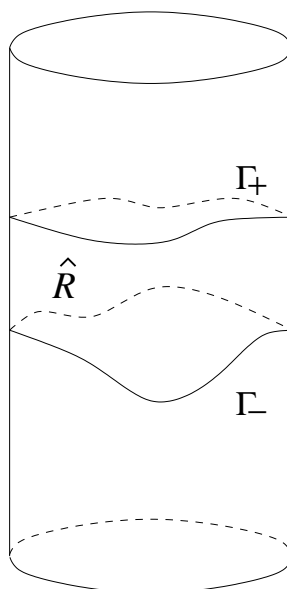
und daher

$$\mathcal{L}(x^*) \leq \mathcal{L}(x)$$

liefert. Daraus folgt aber $\mathcal{L}(x^*) = \mathcal{L}(x)$ wegen der zweiten Ungleichung aus (4.3), und somit ist x^* wie x Minimierer und Lösung von (EG) auf I . Aufgrund der Regularität der Minimierer können sich x_* und x nur tangentiell berühren, was der Eindeutigkeit der Lösungen von (EG) widerspricht. \square

Definition 3. Ein instabiler Birkhoff-Ring \hat{R} für $\hat{\Phi}$ ist eine $\hat{\Phi}$ -invariante kompakte Teilmenge des unendlichen Zylinders \mathcal{C} mit folgenden Eigenschaften:

- 1.) Der Rand von \hat{R} besteht aus zwei Komponenten Γ_- und Γ_+ , die beide $\hat{\Phi}$ -invariante Kreise sind.
- 2.) Falls $\Gamma \subset \hat{R}$ $\hat{\Phi}$ -invarianter Kreis ist, dann ist entweder $\Gamma = \Gamma_-$ oder $\Gamma = \Gamma_+$.

Abbildung 4.2: Birkhoff-Ring \hat{R}

Im folgenden wird \hat{R} immer einen solchen Birkhoff-Ring bezeichnen und Γ_+ die obere Komponente von $\partial\hat{R}$ und Γ_- die untere (Abbildung 4.2). In der Überlagerung entspricht \hat{R} einem Streifen R , der durch zwei Kurven berandet wird, die nach Birkhoffs Satz jeweils Graphen einer periodischen Lipschitz-stetigen Funktion sind (Abbildung 4.3).

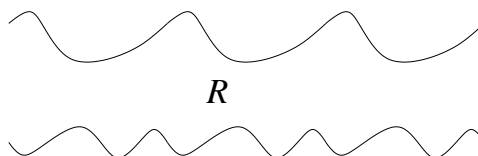


Abbildung 4.3: Birkhoff-Ring in der Überlagerung

Aus einer Bemerkung am Ende des Beweises von Satz 4.1 und Satz 4.2 in [Mat91] sowie deren Beweis folgt der

Satz 8. Sind $\mathcal{O}_- = (x_i^-, y_i^-)_{i \in \mathbb{Z}} = (\Phi^i(x_0^-, y_0^-))_{i \in \mathbb{Z}}$ und $\mathcal{O}_+ = (x_i^+, y_i^+)_{i \in \mathbb{Z}} = (\Phi^i(x_0^+, y_0^+))_{i \in \mathbb{Z}}$ diskrete minimale Φ -Orbits in R - das heißt, es existieren Minimierer x^\pm mit $x^\pm(i) = x_i^\pm$ und $\dot{x}^\pm(i) = y^\pm(i) = y_i^\pm$ für $i \in \mathbb{Z}$ - mit $\rho(\mathcal{O}_-), \rho(\mathcal{O}_+) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\rho(\mathcal{O}_-), \rho(\mathcal{O}_+) \in (\rho(\Gamma_-), \rho(\Gamma_+))$, dann gibt es einen Φ -Orbit $\mathcal{O} = (x_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ mit

$$|x_i - x_i^\pm| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \pm\infty$$

und

$$|y_i - y_i^\pm| \rightarrow 0 \quad \text{für } i \rightarrow \pm\infty.$$

Bemerkung 6. Nach Proposition 2.5 in [Mat91] gibt es für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ minimale Orbits; diese liegen in R , wie man mit einem ähnlichen Beweis wie in Proposition 8 zeigen kann.

Bemerkung 7. Wählen wir $\alpha_+ := \rho(\mathcal{O}_+) \neq \rho(\mathcal{O}_-) =: \alpha_-$, so gilt mit $\mathcal{O} = (x_i, y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ aus Satz 8

$$\frac{x_i}{i} \rightarrow \alpha_{\pm} \quad \text{für } i \rightarrow \pm\infty.$$

Daraus folgt aber das gewünschte kontinuierliche Resultat

$$\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_{\pm} \quad \text{für } t \rightarrow \pm\infty.$$

Beweis von Bemerkung 7. Aus der Euler-Gleichung (EG) erhalten wir für $i = [t]$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(i) + \int_i^t V_x(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Nun ist aber $V_x(t, x)$ auf ganz \mathbb{R}^2 beschränkt. Außerdem gilt $\dot{x}(i) = y_i$ und $|y_i - y_i^{\pm}| \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \pm\infty$ sowie $|y_i^{\pm}| \leq \text{const}$, da die Orbits \mathcal{O}_{\pm} in R liegen. Damit erhalten wir für $t > 1$

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t) - \alpha_+ t}{t} \right| &\leq \left| \frac{x(t) - x(i)}{t} \right| + \left| \frac{x(i) - \alpha_+ i}{t} \right| + \left| \frac{\alpha_+ i - \alpha_+ t}{t} \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_i^t |\dot{x}(\tau)| d\tau + \left| \frac{x(i)}{i} - \alpha_+ \right| + \frac{|\alpha_+|}{t} \\ &\leq \frac{\text{const}}{t} + \left| \frac{x(i)}{i} - \alpha_+ \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun $\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_+$ für $t \rightarrow +\infty$, und analog gilt auch $\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_-$ für $t \rightarrow -\infty$. □

Das Ziel der folgenden Betrachtungen ist also, einen instabilen Birkhoff-Ring zu finden. Wir beginnen dabei mit einer

Definition 4. Eine minimale Blätterung für (EG) ist definiert durch eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- 1.) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x = x(\cdot, \lambda)$ Lösung der Euler-Gleichung (EG) auf ganz \mathbb{R} .
- 2.) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\lambda \mapsto x(t, \lambda)$ ein Homöomorphismus von \mathbb{R} auf \mathbb{R} , und es gilt $x(t, \lambda) < x(t, \lambda')$ für $\lambda < \lambda'$.

Der Name minimale Blätterung ist dadurch gerechtfertigt, daß Extremalen, die in ein Feld von Extremalen eingebettet sind, nach einem Satz, der auf Weierstraß zurückgeht, Minimierer sind (siehe [GF63], Chapter 6, §34). Nach Kapitel 3.1 existiert zu jedem Minimierer x eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t) - \alpha t| < \infty$ gilt. Im Falle einer minimalen Blätterung gibt es eine solche Rotationszahl für alle Blätter:

Lemma 8. Sei $x = x(t, \lambda)$ eine minimale Blätterung für (EG). Dann existiert ein $\alpha =: \rho(x) \in \mathbb{R}$ mit

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t, \lambda) - \alpha t| < \infty \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis von Lemma 8. Sei $\lambda < \lambda'$ und $\rho(x(\cdot, \lambda)) = \alpha$, $\rho(x(\cdot, \lambda')) = \alpha'$. Dann gibt es eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ mit $x(t, \lambda) + k > x(t, \lambda')$ für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus

$$\frac{x(t, \lambda)}{|t|} \leq \frac{x(t, \lambda')}{|t|} \leq \frac{x(t, \lambda) + k}{|t|}$$

folgt. Wegen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{x(t, \lambda)}{|t|} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{x(t, \lambda) + k}{|t|} = \alpha$$

gilt $\alpha = \alpha'$. □

In [Mos86a] wird zu vorgegebenem $a > 0$ ein C^∞ -Potential V konstruiert, das keine minimale Blätterung x mit $\rho(x) = \alpha \in [-a, a]$ zuläßt. Dies soll hier ausgeführt werden. Wir setzen für $|x - \frac{1}{2}|, |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$

$$V(t, x) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 \geq r^2, \\ K \exp\left(-\frac{1}{((x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 - r^2)^2}\right) & \text{für } (x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 < r^2. \end{cases}$$

Dabei wählen wir $0 < 2\delta < r < \frac{1}{6}$ und K so groß, daß $V(t, x) \geq M$ für $(x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 \leq (2\delta)^2$ gilt, wobei $M > 0$ die Ungleichung

$$(4.4) \quad M\delta^2 \geq 11(a + 1)^4$$

erfüllen möge. Desweiteren setzen wir V auf ganz \mathbb{R}^2 periodisch fort (Abbildung 4.4).

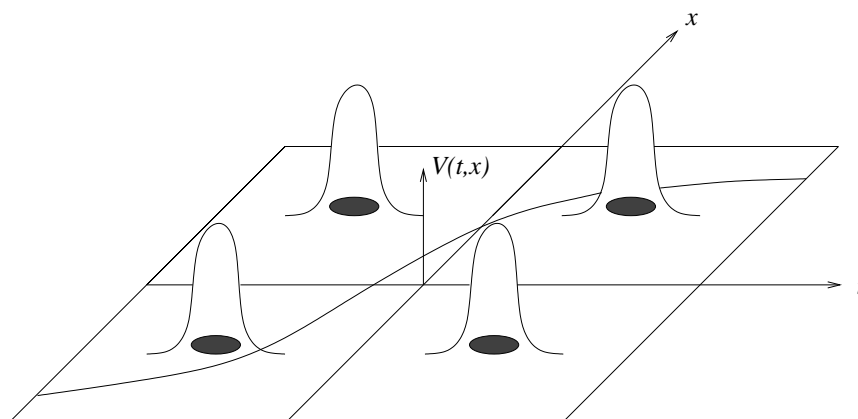
Proposition 9. Unter den oben genannten Voraussetzungen an V gibt es keine minimale Blätterung x mit $\alpha = \rho(x) \in [-a, a]$.

Beweis von Proposition 9. Wir beweisen, daß es keinen Minimierer x mit $(x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 < \delta^2$ und $|\rho(x)| \leq a$ gibt. Wir nehmen dazu das Gegenteil an und definieren $P := (0, x(0))$ und $Q := (1, x(1))$. Für Minimierer x gilt nun (siehe Gleichung (2.9) in [Mos86b])

$$|x(t + k) - x(t) - k\alpha| \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Für $k = 1$ ergibt sich daraus

$$|x(t + 1) - x(t) - \alpha| \leq 1,$$

Abbildung 4.4: Potential $V(t, x)$

was für $t = 0$

$$|x(1) - x(0)| \leq |\alpha| + 1 \leq a + 1$$

liefert. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $x(1) \geq x(0)$ ist und definieren eine Hilfsfunktion, deren Graph die Punkte P und Q stückweise linear verbindet und entlang deren Graph das Potential V verschwindet (Abbildung 4.5).

$$f(t) := \begin{cases} x(0) + t \frac{u-x(0)}{\frac{1}{2}-r} & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}-r], \\ u & \text{für } t \in [\frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}+r], \\ \frac{(1-t)u + (t-\frac{1}{2}-r)x(1)}{\frac{1}{2}-r} & \text{für } t \in [\frac{1}{2}+r, 1], \end{cases}$$

wobei

$$u := \min \left\{ z + \frac{1}{2} \pm r : z \in \mathbb{Z}, z + \frac{1}{2} \pm r \geq x(0) \right\}$$

gesetzt ist. Dann gilt

$$|\dot{f}(t)| \leq \frac{a+1}{\frac{1}{2}-r} \leq 3(a+1)$$

wegen $\frac{1}{2}-r \geq \frac{1}{2}-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. Somit folgt

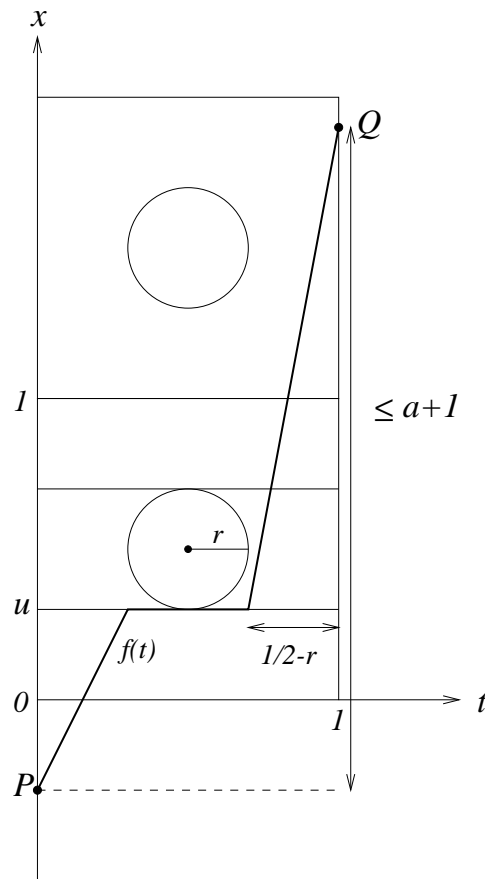
$$(4.5) \quad \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{f}^2(t) + V(t, f(t)) \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{2} \dot{f}^2(t) dt \leq \frac{1}{2} (3(a+1))^2.$$

Dieser Wert soll nun mit

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2(t) + V(t, x(t)) \right) dt$$

verglichen werden, wobei $(t, x(t))$ der Graph eines Minimierers sein soll, der die Kreisscheibe $(x - \frac{1}{2})^2 + (t - \frac{1}{2})^2 < \delta^2$ schneidet.

Es seien

Abbildung 4.5: Hilfsfunktion f

- t_1 : Zeitpunkt des Eintritts in den δ -Kreis,
 t_2 : Zeitpunkt des Austritts aus dem 2δ -Kreis (Abbildung 4.6).

Die Länge der Kurve $(t, x(t))$, $t \in [t_1, t_2]$, die im 2δ -Kreis liegt, in dem $V \geq M$ gilt, ist mindestens δ :

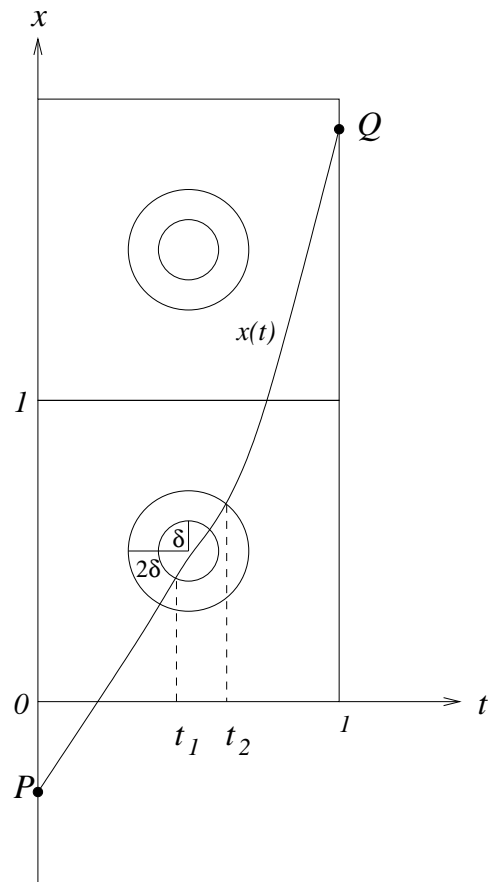
$$\int_{t_1}^{t_2} (1 + \dot{x}^2)^{1/2} dt \geq \delta.$$

Wir setzen nun $\tau := t_2 - t_1$ und erhalten mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\delta^2 \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} (1 + \dot{x}^2)^{1/2} dt \right)^2 \leq \tau \int_{t_1}^{t_2} (1 + \dot{x}^2) dt = 2\tau \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) dt.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} \dot{x}^2 dt \geq \frac{\delta^2}{2\tau} - \frac{1}{2} \tau.$$

Abbildung 4.6: Minimierer x im δ -Kreis

Für die Wirkung des Minimierers x im Intervall $[0, 1]$ gilt dann

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + V(t, x) \right) dt &> \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 + M \right) dt \geq \frac{\delta^2}{2\tau} + \left(M - \frac{1}{2} \right) \tau \\ &\geq 2 \frac{\delta}{\sqrt{2\tau}} \sqrt{\left(M - \frac{1}{2} \right) \tau} = \delta \sqrt{2M - 1}. \end{aligned}$$

Mit (4.5) haben wir nun einen Widerspruch zur Minimalität von x , falls

$$\delta \sqrt{2M - 1} \geq \frac{1}{2} (3(a + 1))^2$$

gilt. Dies ist aber äquivalent zu

$$\delta^2 (2M - 1) \geq \frac{1}{4} (3(a + 1))^4 = \frac{81}{4} (a + 1)^4.$$

Die Ungleichung (4.4) liefert jedoch

$$\begin{aligned}\delta^2(2M - 1) &\geq 2 \cdot 11(a + 1)^4 - \delta^2 \geq 2 \cdot 11(a + 1)^4 - \frac{1}{12^2} \\ &\geq 21(a + 1)^4 \geq \frac{81}{4}(a + 1)^4.\end{aligned}$$

□

Auf der Suche nach einem instabilen Birkhoff-Ring hilft uns die vorangegangene Proposition in Verbindung mit der folgenden weiter.

Proposition 10. *Aus der Nichtexistenz einer minimalen Blätterung x mit $|\rho(x)| \leq a$ folgt die Nichtexistenz eines invarianten Kreises der zu (HS) gehörenden Poincaré-Abbildung mit Rotationszahl $\alpha \in [-a, a]$.*

Beweis von Proposition 10. Wir zeigen, daß ein invarianter Kreis Γ mit $\rho(\Gamma) = \alpha$ eine minimale Blätterung x mit $\rho(x) = \alpha$ liefert.

Wegen Satz 7 können wir Γ darstellen als Graph einer periodischen Lipschitzstetigen Funktion w :

$$\Gamma = \{(\lambda, w(\lambda)) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Wir bilden $x(t, \lambda) := \phi(t, 0, \lambda, w(\lambda))$ und zeigen, daß dies eine minimale Blätterung liefert. Da $(x(0, \lambda), \dot{x}(0, \lambda)) \in \Gamma$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, sind diese Lösungen der Euler-Gleichung nach Proposition 7 Minimierer mit Rotationszahl $\alpha = \rho(\Gamma)$. Für solche Minimierer gilt

$$|\dot{x}(t)| \leq \exp(c(1 + |\alpha|))$$

mit einer Konstanten c , die nur von der Lagrange-Funktion L abhängt (siehe [Den87], Theorem 2.7). Somit liefert die Identität

$$x(t, \lambda) = x(0, \lambda) + \int_0^t \dot{x}(\tau, \lambda) d\tau,$$

daß für festes t

$$x(t, \lambda) \rightarrow \pm\infty \quad \text{für } \lambda \rightarrow \pm\infty$$

gilt. Desweiteren ist $x \in C^0(\mathbb{R}^2)$. Außerdem ist x monoton in λ :

$$x(t, \lambda) > x(t, \lambda') \quad \text{für } \lambda > \lambda'.$$

Gäbe es nämlich ein $t \in (k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, mit $x(t, \lambda) = x(t, \lambda')$, so müßte ein weiteres $t' \in (k, k + 1)$ mit $x(t', \lambda) = x(t', \lambda')$ existieren, da $x(k, \lambda) > x(k, \lambda')$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gelten muß, weil $(x(k, \lambda), \dot{x}(k, \lambda)) \in \Gamma$ ist und Φ die Kurve Γ orientierungserhaltend auf sich abbildet. Wie in Lemma 7 bewiesen, können sich zwei Minimierer höchstens einmal schneiden, was also einen Widerspruch und die gewünschte Monotonie liefert. Damit haben wir für jedes

$t \in \mathbb{R}$ einen Homöomorphismus $x(t, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und somit eine minimale Blätterung, deren Blätter allesamt die Rotationszahl α haben.

□

Wir haben bisher sichergestellt, daß, wenn wir uns beispielsweise $a = 1$ vorgeben, es ein Potential V gibt, so daß die zu (HS) gehörende Poincaré-Abbildung keinen invarianten Kreis mit Rotationszahl $\alpha \in [-a, a]$ besitzt. Um einen instabilen Birkhoff-Ring zu erhalten, müssen wir beweisen, daß es überhaupt invariante Kreise gibt.

In [Mos89] werden für genügend große irrationale Zahlen α , die einer Diophantine-Bedingung

$$|\alpha p - q| \geq c^{-1} q^{-\tau} \quad \forall p/q \in \mathbb{Q}, \quad q > 0,$$

mit positiven Konstanten c und $\tau \geq 1$ genügen, quasiperiodische Lösungen x von (EG) der Gestalt

$$x(t, \lambda) = U(t, \alpha t + \lambda)$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ konstruiert, wobei

$$(4.6) \quad U(t, \theta) - \theta \in C^\infty(\mathbb{T}^2) \quad \text{und} \quad D_\theta U > 0$$

gilt. Also ist $p(t, \theta) := U(t, \theta) - \theta$ eine in t und θ periodische Funktion. Wir können somit x darstellen als

$$x(t, \lambda) = \alpha t + \lambda + p(t, \alpha t + \lambda).$$

Dann ist x eine minimale Blätterung mit Rotationszahl α . Außerdem liefert U einen invarianten Kreis mit der gleichen Rotationszahl:

Aufgrund der Eigenschaften (4.6) existiert zu jedem t und zu jedem x ein θ mit $U(t, \theta) = x$, weswegen wir die in t und x periodische Funktion

$$\psi(t, x) := (D_t + \alpha D_\theta)U(t, \theta) \quad \text{für} \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

definieren können. Dann ist

$$\psi(t, x(t)) = \dot{x}(t),$$

und durch

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = w(x) := \psi(0, x)\}$$

ist ein invarianter Kreis gegeben: Ist $(x(t), y(t))$ die Lösung von (HS) mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \Gamma$, so gilt

$$y(1) = \dot{x}(1) = \psi(1, x(1)) = \psi(0, x(1)) = w(x(1)).$$

Außerdem folgt aus der Periodizität von ψ in x die Periodizität von w .

Aufgrund der Symmetrie des Potentials V liefert $W(t, \theta) := U(-t, -\theta)$

eine minimale Blätterung bzw. einen invarianten Kreis mit Rotationszahl $-\alpha$. Wegen Proposition 8 gibt es dann invariante Kreise Γ_- und Γ_+ , so daß in dem von diesen Kurven berandeten Gebiet keine weiteren invarianten Kreise liegen. Damit ist die Existenz eines instabilen Birkhoff-Rings und einer Lösung x von (EG) sowie zweier Zahlen $\alpha_+ \neq \alpha_-$ mit $\frac{x(t)}{t} \rightarrow \alpha_{\pm}$ für $t \rightarrow \pm\infty$ bewiesen. □

4.2 Heterokline Lösungen mit periodischen Asymptoten

Hier befassen wir uns mit dem Euler-Gleichungssystem

$$(EG) \quad \ddot{x} = V_x(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

wobei

$$(V_1) \quad V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}) \text{ und } V(t + \bar{z}, x + z) = V(t, x) \quad \forall (\bar{z}, z) \in \mathbb{Z}^{N+1}$$

sowie

$$(V_2) \quad V(-t, x) = V(t, x)$$

erfüllt sein mögen. Ferner werden die Lagrange-Funktion

$$L(t, x, \dot{x}) := \frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V(t, x)$$

und das Energiefunktional

$$I_1(x) := \int_0^1 L(t, x, \dot{x}) dt$$

definiert. Dann gilt

$$(4.7) \quad I_1(x + z) = I_1(x) \quad \forall z \in \mathbb{Z}^N.$$

Außerdem werden

$$E_1 := \{x \in H^{1,2}([0, 1], \mathbb{R}^N) : x \text{ ist periodisch}\}$$

sowie

$$(4.8) \quad c_1 := \inf_{x \in E_1} I_1(x)$$

erklärt. Schließlich sei die Menge der periodischen Minimierer

$$\mathcal{K}_1 := \{x \in E_1 : I_1(x) = c_1\}$$

definiert. Wegen (4.7) ist mit $x \in \mathcal{K}_1$ auch $x + z \in \mathcal{K}_1$ für $z \in \mathbb{Z}^N$. Im einfachsten Fall existiert also ein Gitter von Minimierern. Nun kann das folgende Ergebnis von Rabinowitz [Rab94] formuliert werden:

Satz 9. *Falls das Potential V die Bedingungen (V_1) , (V_2) sowie*

$$(*) \quad \mathcal{K}_1 \text{ besteht aus (in der } C^2\text{-Norm) isolierten Punkten}$$

erfüllt, dann existiert zu jedem $v \in \mathcal{K}_1$ eine periodische Lösung $w \in \mathcal{K}_1 \setminus \{v\}$ von (EG) und eine Lösung X von (EG), so daß $X(t) - v(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$ und $X(t) - w(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$. X ist also heteroklin von v nach w .

Bemerkung 8. (i) Die Bedingung (*) schließt den autonomen Fall $V = V(x)$ aus, da dann mit $x(t)$ auch $x(t + \theta)$ für $\theta \in \mathbb{R}$ Lösung von (EG) ist.

(ii) Falls die Bedingung (*) nicht erfüllt ist, so kann man durch ein kleine Störung erreichen, daß (*) gesichert ist, indem man beispielsweise für $\bar{x}, \tilde{x} \in \mathcal{K}_1$, $\bar{x} \neq \tilde{x}$ und $\epsilon > 0$ von V zu

$$V_\epsilon(t, x) = V(t, x) + \epsilon|x - \bar{x}(t)|^2|x - \tilde{x}(t)|^2$$

übergeht und statt I_1

$$I_\epsilon(x) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2} |\dot{x}|^2 + V_\epsilon(t, x) \right) dt$$

für $x \in E_1$ behandelt. Dann gilt

$$I_\epsilon(x) > I_1(x) = c_1 = I_\epsilon(\bar{x}) = I_\epsilon(\tilde{x}),$$

wenn $x \in \mathcal{K}_1 \setminus \{\bar{x}, \tilde{x}\}$ ist.

Bevor wir ein geeignetes Variationsproblem formulieren, um den Beweis von Satz 9 zu führen, wird eine Reihe von Hilfssätzen bewiesen. Zunächst gilt das folgende

Lemma 9. Genügt V der Bedingung (V_1) , so existiert eine Funktion $v \in E_1$ mit $I_1(v) = c_1$. Desweiteren ist v periodische Lösung von (EG).

Beweis von Lemma 9. Sei $\{x_m\} \subset E_1$ eine Minimalfolge für (4.8). Dann können wir wegen (4.7) annehmen, daß $0 \leq [(x_m)_i] < 1$, $1 \leq i \leq N$, gilt. Wegen (V_1) ist V auf \mathbb{R}^{N+1} beschränkt: $V(t, x) \leq K \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Damit folgt

$$\int_0^1 \frac{1}{2} |\dot{x}_m|^2 dt = I_1(x_m) - \int_0^1 V(t, x_m) dt \leq I_1(x_m) + K.$$

Da $\{x_m\}$ Minimalfolge ist, gilt somit $\|\dot{x}_m\|_{L^2([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq \text{const}$. Die Poincaré-Ungleichung

$$\|x_m - [x_m]\|_{L^2([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq c \|\dot{x}_m\|_{L^2([0,1], \mathbb{R}^N)}$$

zeigt nun, daß die Sobolew-Norm $\|x_m\|_{H^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)}$ beschränkt in E_1 ist. Es gibt also eine Teilfolge, die wieder mit $\{x_m\}$ bezeichnet wird und schwach in $H^{1,2}$ konvergiert: $x_m \rightharpoonup v$, $m \rightarrow \infty$. Die schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals liefert

$$c_1 \leq I_1(v) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} I_1(x_m) = c_1.$$

Hieraus folgt also $v \in \mathcal{K}_1$. Daher gilt

$$\int_0^1 (\dot{v} \cdot \dot{\varphi} + V_x(t, v) \cdot \varphi) dt = 0 \quad \forall \varphi \in E_1.$$

Eine leichte Modifikation der Argumentation im Beweis der später folgenden Proposition 13 ergibt die Behauptung, daß v die Euler-Gleichung (EG) erfüllt.

□

Wir benötigen einen weiteren Hilfssatz, der die Zeitsymmetrie des Potentials ausnutzt.

Lemma 10. *Falls V den Bedingungen (V_1) und (V_2) genügt, so gilt*

$$c_1 = 2 \inf_{x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)} \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, x, \dot{x}) dt.$$

Außerdem gilt für $v \in \mathcal{K}_1$ die Symmetrie $v(-t) = v(t)$.

Beweis von Lemma 10. Für $x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)$ definieren wir

$$(4.9) \quad w(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ x(1-t) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

und setzen w periodisch auf ganz \mathbb{R} fort. Also gilt $w \in E_1$, und wegen (V_1) und (V_2) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 L(t, w, \dot{w}) dt &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} |\dot{x}(1-t)|^2 + V(t, x(1-t)) \right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} |\dot{x}(1-t)|^2 + V(1-t, x(1-t)) \right) dt \\ &= - \int_{1-\frac{1}{2}}^0 L(t, x, \dot{x}) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, w, \dot{w}) dt. \end{aligned}$$

Zu jedem $x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)$ existiert folglich eine Funktion $w \in E_1$ mit

$$I_1(w) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, x, \dot{x}) dt.$$

Wir haben also die Ungleichung

$$c_1 \leq 2 \inf_{x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)} \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, x, \dot{x}) dt.$$

Nun versuchen wir, die umgekehrte Ungleichung zu beweisen. Sei dazu $v \in \mathcal{K}_1$ und

$$I_1(v) = \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, v, \dot{v}) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 L(t, v, \dot{v}) dt =: \alpha_1 + \alpha_2.$$

Wir wählen den Zeitabschnitt aus, während dessen v den kleineren Anteil von I_1 liefert und spiegeln v an $t = \frac{1}{2}$: Wir nehmen $\alpha_1 \leq \alpha_2$ an und definieren wiederum

$$w(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ v(1-t) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

(Im Fall $\alpha_1 > \alpha_2$ hätten wir

$$w(t) = \begin{cases} v(1-t) & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ v(t) & \text{für } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

gesetzt.) Es wird $x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)$ durch $x(t) = w(t)$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$, definiert. Dann folgt wie oben

$$(4.10) \quad 2 \inf_{x \in H^{1,2}([0, \frac{1}{2}], \mathbb{R}^N)} \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, x, \dot{x}) dt \leq I_1(w) \leq \alpha_1 + \alpha_2 = I_1(v) = c_1.$$

Es folgt also Gleichheit in (4.10), und somit ist $w \in \mathcal{K}_1$, insbesondere löst w (EG). v und w stimmen jedoch auf einer Hälfte des Intervalls $[0, 1]$ überein, und aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems sind die beiden Funktionen identisch. Deswegen gilt $v(\frac{1}{2} + t) = v(\frac{1}{2} - t)$ und daher

$$v(-t) = v(1-t) = v\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - t\right) = v\left(\frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}\right) = v(t),$$

das heißt, v ist gerade. □

Sei nun $E := H^{1,2}([0, 1], \mathbb{R}^N)$. Dann gilt das folgende

Korollar 1.

$$\bar{c}_1 := \inf_{x \in E} I_1(x) = c_1.$$

Es gilt sogar

$$I_1(x) > c_1 \quad \text{für } x \in E \setminus E_1.$$

Beweis von Korollar 1. Aus $E_1 \subset E$ folgt $\bar{c}_1 \leq c_1$. Angenommen, es gelte $\bar{c}_1 < c_1$. Dann gibt es eine Funktion $x \in E$ mit

$$I_1(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} L(t, x, \dot{x}) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 L(t, x, \dot{x}) dt < c_1.$$

Nun können wir den kleineren Anteil wählen und wie im Beweis von Lemma 10 spiegeln, was uns eine Funktion $w \in E_1$ liefert mit $I_1(w) < c_1$. Das allerdings ist ein Widerspruch zur Definition von c_1 .

Ebenso zeigt man leicht die stärkere Aussage von Korollar 1, indem man zusätzlich wie im Beweis von Lemma 10 die Eindeutigkeit der Lösung ausnutzt.

□

Als nächstes wird ein Resultat bewiesen, welches die Voraussetzung (*) verwendet.

Lemma 11. *Werden die Bedingungen $(V_1), (V_2)$ und $(*)$ von V erfüllt, so existiert eine reelle Zahl $b > 0$, so daß $|v(0) - w(0)| \geq b \quad \forall v \neq w \in \mathcal{K}_1$ gilt.*

Beweis von Lemma 11. a) Zunächst gilt $v(0) \neq w(0) \quad \forall v \neq w \in \mathcal{K}_1$. Lemma 10 liefert nämlich $v(t) = v(-t)$ für $v \in \mathcal{K}_1$, und somit gilt $\dot{v}(0) = 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung dürfen sich die Graphen zweier Funktionen aus \mathcal{K}_1 zu ganzzahligen Zeiten nicht berühren.

b) Wir nehmen nun an, es gäbe eine Folge $\{v_m\} \subset \mathcal{K}_1$ von verschiedenen Elementen mit $v_m(0) \rightarrow a \in \mathbb{R}^N$. Wegen

$$v_m(t) = v_m(0) + \int_0^t \dot{v}_m(\tau) d\tau$$

gilt

$$|v_m(t)| \leq |v_m(0)| + \int_0^1 |\dot{v}_m(t)| dt$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v_m(t)|^2 dt &\leq \left(|v_m(0)| + \|\dot{v}_m\|_{L^2([0,1], \mathbb{R}^N)} \right)^2 \\ &\leq \left(|v_m(0)| + (2I_1(v_m) + 2K)^{1/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Da wir $I_1(v_m) = c_1$ haben, ist $\{v_m\}$ in E beschränkt und besitzt eine in E schwach konvergente Teilfolge, wieder mit $\{v_m\}$ bezeichnet: $v_m \rightharpoonup v$, $m \rightarrow \infty$. Die schwache Unterhalbstetigkeit von I_1 zeigt, daß $I_1(v) = c_1$ gelten muß, und somit $v \in \mathcal{K}_1$. Außerdem gilt $v_m \rightarrow v$ in L^∞ , und wegen der Euler-Gleichung gilt dies auch für die zweite Ableitung. Mit einer Abschätzung der Form (Beweis später)

$$(4.11) \quad \|\dot{v}_m - \dot{v}\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq \|\ddot{v}_m - \ddot{v}\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)}$$

folgt, daß $v_m \rightarrow v$ in $C^2([0,1], \mathbb{R}^N)$ gilt. Die Funktion v ist aber daher in \mathcal{K}_1 nicht isoliert; ein Widerspruch zur Annahme (*).

Zum Beweis von (4.11) definieren wir $q := v_m - v$ und erhalten für $t \in [0, 1]$

$$|\dot{q}(t)| \leq |\dot{q}(0)| + \int_0^1 |\ddot{q}(\tau)| d\tau.$$

Wegen $\dot{v}_m(0) = \dot{v}(0) = 0$ folgt daraus (4.11). □

Bemerkung 9. Aus dem eben bewiesenen Lemma folgt sofort, daß

$$(4.12) \quad \gamma := \inf\{\|v - w\|_{L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)} : v, w \in \mathcal{K}_1, v \neq w\} \geq b > 0$$

gilt.

Im folgenden werden wir für $x \in E$ mit $\mathcal{B}_r(x)$ den Ball in E um x mit Radius r bezeichnen. Bevor wir mit dem Beweis von Satz 9 beginnen können, benötigen wir noch ein weiteres technisches Hilfsmittel.

Proposition 11. Sind $(V_1), (V_2)$ und $(*)$ erfüllt, so existiert zu jedem genügend kleinen $\rho > 0$ ein $\alpha = \alpha(\rho) > 0$ mit den folgenden drei Eigenschaften:

$$(i) \quad \mathcal{B}_\rho(v) \cap \mathcal{B}_\rho(w) = \emptyset \text{ für } v \neq w \in \mathcal{K}_1,$$

$$(ii) \quad I_1(x) > c_1 \text{ für } x \in \mathcal{B}_\rho(\mathcal{K}_1) \setminus \mathcal{K}_1,$$

$$(iii) \quad I_1(w) > c_1 + \alpha, \text{ falls } w \in E \setminus \mathcal{B}_\rho(\mathcal{K}_1).$$

Beweis von Proposition 11. (i) Für $\varphi \in E$ gilt

$$(4.13) \quad 2 \|\varphi\|_{H^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \|\varphi\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)},$$

denn aufgrund der Stetigkeit von $|\varphi|$ und des Mittelwertsatzes der Integralrechnung gibt es eine reelle Zahl $\tau \in [0, 1]$ mit

$$|\varphi(\tau)| = \int_0^1 |\varphi(s)| ds.$$

Damit folgt aus

$$\varphi(t) = \varphi(\tau) + \int_\tau^t \dot{\varphi}(s) ds$$

die Abschätzung

$$|\varphi(t)| \leq \int_0^1 |\varphi(s)| ds + \int_0^1 |\dot{\varphi}(s)| ds.$$

Hieraus folgt die Behauptung (4.13) mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung. Wegen (4.12) gilt nun $\|v - w\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \gamma$ für $v \neq w \in \mathcal{K}_1$. (4.13) liefert dann aber $\|v - w\|_{H^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)} > \rho$ für $\rho < \frac{\gamma}{2}$. Die Aussage (ii) folgt sofort aus Korollar 1.

Mehr Aufwand erfordert der Beweis von (iii): Wir nehmen an, diese Aussage sei falsch. Dann existiert eine Folge $\{u_m\} \subset E \setminus \mathcal{B}_\rho(\mathcal{K}_1)$ mit $I_1(u_m) \rightarrow c_1$. Wiederum können wir $0 \leq [(u_m)_i] < 1$ für $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, N\}$ annehmen, woraus erneut folgt, daß $\{u_m\}$ in E beschränkt ist. Es läßt sich somit eine Teilfolge - wieder mit $\{u_m\}$ bezeichnet - finden, so daß $u_m \rightarrow u$ in E und $u_m \rightarrow u$ in L^∞ gilt. Wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit folgt daraus $I_1(u) = c_1$, also $u \in \mathcal{K}_1$.

Definieren wir $w_m := u_m - u$, so gilt $\|w_m\|_{H^{1,2}([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \rho$ und $w_m \rightarrow 0$ in E sowie $w_m \rightarrow 0$ in L^∞ .

Wir möchten nun zeigen, daß dann nicht $I_1(u_m) \rightarrow c_1$ gelten kann. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} I_1(u_m) &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} |\dot{u}|^2 + \dot{u} \cdot w_m + \frac{1}{2} |\dot{w}_m|^2 + \frac{1}{2} |w_m|^2 - \frac{1}{2} |w_m|^2 + V(t, u_m) \right\} dt \\ &\geq \frac{1}{2} \rho^2 + I_1(u) + \int_0^1 \left\{ -V(t, u) + \dot{u} w_m - \frac{1}{2} |w_m|^2 + V(t, u_m) \right\} dt \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 + c_1 + \int_0^1 (V(t, u_m) - V(t, u)) dt + \int_0^1 \dot{u} w_m dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 |w_m|^2 dt. \end{aligned}$$

Wegen $u_m \rightarrow u$ in L^∞ folgt $\int_0^1 (V(t, u_m) - V(t, u)) dt \rightarrow 0$, ebenso

$$\int_0^1 |w_m|^2 dt \rightarrow 0.$$

Außerdem ergibt die schwache Konvergenz der w_m

$$\int_0^1 \dot{u} w_m dt \rightarrow 0.$$

Dies liefert zusammen, daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_1(u_m) \geq \frac{1}{2} \rho^2 + c_1$$

gilt, was einen Widerspruch zur Wahl der Folge $\{u_m\}$ darstellt. \square

Bemerkung 10. Wir nehmen ab jetzt an, daß $\rho < \min \left\{ \frac{\gamma}{4}, \frac{b}{2} \right\}$ gilt.

Wir gehen nun dazu über, das Variationsproblem zu definieren, das unser Hauptresultat Satz 9 liefern wird. Dazu nehmen wir $v \in \mathcal{K}_1$, $x \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ sowie $p \in \mathbb{Z}$ an. Wir setzen

$$(4.14) \quad a_p(x) := \int_p^{p+1} L(t, x, \dot{x}) dt - c_1 = \int_p^{p+1} (L(t, x, \dot{x}) - L(t, v, \dot{v})) dt.$$

Aus Korollar 1 folgt sofort, daß $a_p(x) \geq 0$ gelten muß. Weiter wird J durch

$$(4.15) \quad J(x) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p(x)$$

definiert. Ferner sei

$$\Gamma := \left\{ x \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) : x(t) - v(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty, \right. \\ \left. \exists w \in \mathcal{K}_1 \setminus \{v\} \text{ mit } x(t) - w(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow +\infty \right\}.$$

Setzt man für $v \in \mathcal{K}_1$ und $z \in \mathbb{Z}^N$, $z \neq 0$,

$$x(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } t \in (-\infty, 0), \\ v(0) + t(v(1) + z - v(0)) & \text{für } t \in [0, 1], \\ v(t) + z & \text{für } t \in (1, \infty), \end{cases}$$

so gilt offensichtlich $x \in \Gamma$ - also $\Gamma \neq \emptyset$ - sowie $J(x) < \infty$.

Schließlich soll

$$(4.16) \quad c := \inf_{x \in \Gamma} J(x)$$

gesetzt sein. Die Behauptung von Satz 9 ergibt sich dann aus den beiden folgenden Propositionen:

Proposition 12. *Es existiert eine Funktion $X \in \Gamma$ mit $J(X) = c$.*

Proposition 13. *X löst die Euler-Gleichung (EG).*

Beweis von Proposition 12. Zunächst gilt $J(x) \geq 0$ für $x \in \Gamma$, da jeder Summand $a_p(x)$ nichtnegativ ist. Somit ist auch $c \geq 0$. Sei ρ wie in Proposition 11 und Bemerkung 10 und $\tau_k x(t) := x(t - k)$. Außerdem möge $\{x_m\}$ Minimalfolge für (4.16) sein. Dann gilt $J(\tau_{k(m)} x_m) = J(x_m)$ für $\{k(m)\} \subset \mathbb{Z}$, und $\{\tau_{k(m)} x_m\}$ ist ebenfalls Minimalfolge. Wir wählen nun $k(m)$ so, daß

$$(4.17) \quad |\tau_{k(m)} x_m(t) - v(t)| = |x_m(t - k(m)) - v(t - k(m))| \leq \rho \quad \text{für } t \leq 0$$

gilt, sowie mit der Eigenschaft, daß $\tau_{k(m)} x_m(t)$ den Ball $B_\rho(v(t)) \subset \mathbb{R}^N$ zum ersten Mal zu einer Zeit $t \in [0, 1)$ verläßt. Allerdings wählen wir die Minimalfolge $\{x_m\}$ gleich so, daß (4.17) mit $k(m) = 0$ gilt. Da $\{x_m\}$ eine Minimalfolge ist, existiert eine Konstante $M > 0$ mit $J(x_m) \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Daher folgt für $l \in \mathbb{N}$

$$\int_{-l}^l (L(t, x_m, \dot{x}_m) - c_1) dt \leq J(x_m) \leq M$$

sowie

$$\int_{-l}^l |\dot{x}_m|^2 dt \leq 2 \left(2lc_1 + M - \int_{-l}^l V(t, x_m(t)) dt \right) \leq M_1(l).$$

Desweiteren gilt wegen (4.17) $|x_m(0) - v(0)| \leq \rho$, was zu $|x_m(0)| \leq |v(0)| + \rho$ führt. Aus

$$|x_m(t)| \leq |x_m(0)| + \left| \int_0^t |\dot{x}_m(\tau)| d\tau \right| \leq |x_m(0)| + (lM_1(l))^{1/2}$$

folgt somit, daß $\|x_m\|_{H^{1,2}([-l,l], \mathbb{R}^N)} \leq M_2(l)$ gilt. Das heißt, daß $\{x_m\}$ in $H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ beschränkt ist. Es existiert also eine Teilfolge - wieder mit $\{x_m\}$ bezeichnet - mit $x_m \rightharpoonup X$ in $H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ und $x_m \rightarrow X$ in $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$.

Gezeigt werden nun zwei Eigenschaften: $X \in \Gamma$ und $J(X) = c$. Zunächst nehmen wir $X \in \Gamma$ an. Dann folgt $J(X) \geq c$. Geben wir uns ein beliebiges $\epsilon > 0$ vor, so gilt

$$\sum_{p=-l}^l a_p(X) \geq J(X) - \epsilon$$

für genügend großes l . Aufgrund der schwachen Unterhalbstetigkeit folgt

$$c = \liminf_{m \rightarrow \infty} J(x_m) \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{p=-l}^l a_p(x_m) \geq \sum_{p=-l}^l a_p(X) \geq J(X) - \epsilon \geq c - \epsilon.$$

Da aber $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt somit $J(X) = c$.

Wir zeigen also nun, daß $X \in \Gamma$ ist.

Für $l \in \mathbb{N}$ gilt wie oben

$$\sum_{p=-l}^l a_p(X) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{p=-l}^l a_p(x_m) \leq M.$$

Wegen $a_p(X) \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{Z}$ ergibt sich $a_p(X) \rightarrow 0$ für $|p| \rightarrow \infty$. Wir definieren nun $X_p(t) := X(t+p)$, $t \in [0, 1]$. Dies liefert für $|p| \gg 0$

$$I_1(X_p) - c_1 = a_p(X_p) \leq \frac{1}{2}\alpha(\rho).$$

Das bedeutet allerdings

$$I_1(X_p) \leq c_1 + \frac{\alpha(\rho)}{2}.$$

Wegen Proposition 11(iii) folgt daraus $X_p \notin E \setminus \mathcal{B}_\rho(\mathcal{K}_1)$ beziehungsweise $X_p \in \mathcal{B}_\rho(\mathcal{K}_1)$. Es gibt also eine Funktion $v_p \in \mathcal{K}_1$ mit $\|X_p - v_p\|_E \leq \rho$. Das wiederum liefert

$$(4.18) \quad \|X_p - v_p\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq 2 \|X_p - v_p\|_E \leq 2\rho.$$

Zunächst kümmern wir uns um die linke Asymptote. Sei also $p < 0$. Aus (4.17) folgt

$$|x_m(t+p) - v(t+p)| = |x_m(t+p) - v(t)| \leq \rho, \quad t \in [0, 1].$$

Für $m \rightarrow \infty$ bedeutet diese Ungleichung

$$(4.19) \quad \|X_p - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq \rho.$$

Aus (4.18) und (4.19) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} \|v - v_p\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} &\leq \|X_p - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} + \|X_p - v_p\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \\ &\leq \rho + 2\rho \leq \frac{\gamma}{4} + \frac{\gamma}{2} < \gamma. \end{aligned}$$

Bemerkung 9 liefert somit $v_p = v$ für $p \ll 0$. Das heißt, es gilt

$$(4.20) \quad \|X_p - v\|_E \leq \rho$$

für genügend kleine p . Ziel ist es,

$$\|X_p - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow -\infty$$

zu beweisen. Aus (4.20) folgt wiederum die Existenz einer Teilfolge $\{X_{p_j}\}$ mit $X_{p_j} \rightharpoonup X^* \in \mathcal{B}_\rho(v)$ in E sowie

$$I_1(X^*) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I_1(X_{p_j}).$$

Wegen

$$I_1(X_{p_j}) - c_1 = a_{p_j}(X) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty,$$

gilt $I_1(X^*) = c_1$ und somit $X^* \in \mathcal{K}_1$. Darüber hinaus ergibt sich wegen $X^* \in \mathcal{B}_\rho(v)$

$$\|X^* - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq 2\rho < \gamma,$$

woraus $X^* = v$ folgt. Es gilt folglich $X_{p_j} \rightharpoonup v$ in E und $X_{p_j} \rightarrow v$ in $L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)$ für $j \rightarrow \infty$. Bisher haben wir die gewünschte Konvergenz also nur für eine Teilfolge der X_p bewiesen. Wir nehmen an, es gäbe eine Teilfolge $\{X_{p_k}\} \subset \{X_p\}$ und ein $\epsilon > 0$ mit $\|X_{p_k} - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \epsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann würde es aufgrund der eben durchgeführten Überlegungen eine Teilfolge $\{X_{p_{k_l}}\}$ geben, die in $L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)$ gegen v konvergiert, ein Widerspruch. Somit gilt für die gesamte Folge

$$\|X_p - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{für } p \rightarrow -\infty,$$

also auch

$$X(t) - v(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

Da die andere Asymptote noch nicht behandelt wurde, nehmen wir nun $p > 0$ an. In der Ungleichung (4.18) spielte das Vorzeichen von p noch keine

Rolle. Es gibt also eine Funktion $v_p \in \mathcal{K}_1$ mit $\|X_p - v_p\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \leq 2\rho$, falls p hinreichend groß ist. Daraus ergibt sich wegen der Periodizität von v

$$|X_p(1) - v_p(1)| = |X_{p+1}(0) - v_p(0)| \leq 2\rho$$

sowie

$$|X_{p+1}(0) - v_{p+1}(0)| \leq 2\rho$$

für genügend großes p . Somit gilt

$$|v_p(0) - v_{p+1}(0)| \leq 4\rho < \gamma \quad \text{für } p \gg 0.$$

Also ergibt sich wiederum $v_{p+1} = v_p$ für $p \gg 0$, und wir definieren $w := v_p$ für eben diese p . Dann gilt wie schon im Fall der linken Asymptote

$$w(t) - X(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Es muß jetzt allerdings noch bewiesen werden, daß $v \neq w$ gilt. Wir nehmen dazu an, daß $X(t) - v(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, gilt und versuchen dies zum Widerspruch zu führen.

Zu jedem $\delta > 0$ existiert dann ein $t_\delta \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, so daß

$$|X(t) - v(t)| \leq \delta \quad \forall t \geq t_\delta - 1$$

gilt. Für eine Teilfolge $\{x_m\}$ der Minimalfolge gilt $x_m \rightarrow X$ in $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ für $m \rightarrow \infty$. Deswegen existiert aufgrund der Wahl der Minimalfolge in (4.17) ein Zeitpunkt $t^* \in [0, 1]$ mit $X(t^*) \in \partial B_\rho(v(t^*))$ also mit

$$(4.21) \quad |X(t^*) - v(t^*)| = \rho.$$

Außerdem gibt es einen Index $m_0 = m_0(\delta)$ mit

$$|x_m(t) - v(t)| \leq 2\delta \quad \forall t \in [t_\delta - 1, t_\delta] \quad \forall m \geq m_0.$$

Wir definieren nun eine Folge von Vergleichsfunktionen $X_{m,\delta}$, deren Funktionswerte $J(X_{m,\delta})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ kleiner als die der x_m sind. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\delta \in (0, 1)$ setzen wir

$$X_{m,\delta}(t) := \begin{cases} v(t) & \text{für } t \in (-\infty, t_\delta - \delta), \\ \frac{t_\delta - t}{\delta} v(t_\delta - \delta) + \frac{t - (t_\delta - \delta)}{\delta} x_m(t_\delta) & \text{für } t \in [t_\delta - \delta, t_\delta], \\ x_m(t) & \text{für } t \in (t_\delta, \infty). \end{cases}$$

Es ist also $\{X_{m,\delta}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \Gamma$ und $a_p(X_{m,\delta}) = 0$ für $p < t_\delta - 1$, sowie $a_p(X_{m,\delta}) = a_p(x_m)$ für $p \geq t_\delta$. Folglich muß der Anteil $a_{t_\delta-1}(X_{m,\delta})$ nach oben abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} a_{t_\delta-1}(X_{m,\delta}) &= \int_{t_\delta-1}^{t_\delta} \left(\frac{1}{2} |\dot{X}_{m,\delta}|^2 + V(t, X_{m,\delta}) - \frac{1}{2} |\dot{v}|^2 - V(t, v) \right) dt \\ &\leq \int_{t_\delta-\delta}^{t_\delta} \left(\frac{1}{2\delta^2} |x_m(t_\delta) - v(t_\delta - \delta)|^2 + 2K \right) dt \\ &\leq \frac{1}{2\delta^2} |x_m(t_\delta) - v(t_\delta - \delta)|^2 \delta + b_1 \delta, \end{aligned}$$

wobei b_1 weder von δ noch von m abhängt. Desweiteren gilt mit $m_v := \sup_{\mathbb{R}} \dot{v}(t)$

$$\begin{aligned} |x_m(t_\delta) - v(t_\delta - \delta)| &\leq |x_m(t_\delta) - v(t_\delta)| + |v(t_\delta) - v(t_\delta - \delta)| \\ &\leq 2\delta + \int_{t_\delta - \delta}^{t_\delta} |\dot{v}(t)| dt \leq 2\delta + \delta m_v \end{aligned}$$

für $m \geq m_0$. Insgesamt können wir damit $a_{t_\delta - 1}(X_{m,\delta})$ linear in δ abschätzen:

$$a_{t_\delta - 1}(X_{m,\delta}) \leq b_2 \delta,$$

wobei b_2 erneut von δ und m unabhängig und $m \geq m_0$ ist. Wir können also δ so klein wählen, daß

$$a_{t_\delta - 1}(X_{m,\delta}) \leq \frac{\alpha\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2}$$

für $m \geq m_0$ gilt. Es ergibt sich somit

$$(4.22) \quad J(X_{m,\delta}) = a_{t_\delta - 1}(X_{m,\delta}) + \sum_{p=t_\delta}^{\infty} a_p(x_m) \leq \frac{\alpha\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2} + J(x_m) - a_0(x_m).$$

Wegen (4.21) haben wir

$$\|x_m - v\|_E \geq \frac{1}{2} \|x_m - v\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \frac{\rho}{2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Es ist also $x_m \notin \mathcal{B}_{\frac{\rho}{2}}(v)$ für $m \in \mathbb{N}$. Sei nun $x \in \mathcal{K}_1$ und $x \neq v$. Dann folgt

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \|x_m - x\|_E &\geq \frac{1}{2} \|x_m - x\|_{L^\infty([0,1], \mathbb{R}^N)} \geq \frac{1}{2} |x_m(0) - x(0)| \\ &\geq \frac{1}{2} (|x(0) - v(0)| - |x_m(0) - v(0)|). \end{aligned}$$

Aus (4.17) folgt wiederum, daß $|x_m(0) - v(0)| \leq \rho$ gilt. Außerdem gilt $|x(0) - v(0)| \geq b > 2\rho$ nach Lemma 11 und Bemerkung 10. Daher können wir (4.23) weiter abschätzen:

$$\|x_m - x\|_E \geq \frac{1}{2}(2\rho - \rho) = \frac{\rho}{2},$$

woraus $x_m \notin \mathcal{B}_{\frac{\rho}{2}}(\mathcal{K}_1)$ folgt. Nun können wir Proposition 11(iii) anwenden und

$$a_0(x_m) = I_1(x_m) - c_1 > \alpha\left(\frac{\rho}{2}\right)$$

erhalten. Dies setzen wir in (4.22) ein, was

$$J(X_{m,\delta}) \leq \frac{\alpha\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2} + J(x_m) - \alpha\left(\frac{\rho}{2}\right) = J(x_m) - \frac{\alpha\left(\frac{\rho}{2}\right)}{2}$$

für hinreichend großes $m \in \mathbb{N}$ liefert. Somit kann $\{x_m\}$ keine Minimalfolge sein. Es gilt also $v \neq w$ und deswegen $X \in \Gamma$. □

Bemerkung 11. *Als Kommentar zum Beweis von Proposition 12 sollte erwähnt werden, daß es eine Rolle gespielt hat, daß die rechte Asymptote w , anders als v , nicht im voraus vorgegeben wurde. Hätte man die eventuell naheliegendere Definition*

$$\Gamma := \left\{ x \in H_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N) : x(t) - v(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow -\infty \text{ und} \right. \\ \left. x(t) - w(t) \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow +\infty \right\}$$

mit vorbestimmten $v, w \in \mathcal{K}_1$ gewählt, so hätte man nicht (4.17) mit Ersetzung von v durch w anwenden können. Daher waren die etwas kompliziertere Definition von Γ und der damit kompliziertere Beweis, daß $X \in \Gamma$ gilt, nötig.

Es fehlt nun lediglich noch der Beweis von Proposition 13. Sei $-\infty < r < s < +\infty$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ mit $\text{supp } \varphi \subset [r, s]$, sowie $\delta \in \mathbb{R}$. Dann ist $X + \delta\varphi \in \Gamma$, da φ kompakten Träger hat und somit an der Asymptotik nichts ändert. Weiterhin gilt

$$J(X) \leq J(X + \delta\varphi) < \infty.$$

Definieren wir

$$\psi(\delta) := J(X + \delta\varphi) - J(X) = \int_r^s \left(L(t, X + \delta\varphi, \dot{X} + \delta\dot{\varphi}) - L(t, X, \dot{X}) \right) dt,$$

so folgt $\psi \geq 0$ und $\psi(0) = 0$. Deswegen erhalten wir

$$(4.24) \quad 0 = \frac{d\psi}{d\delta}(0) = \int_r^s \left(\dot{X} \cdot \dot{\varphi} + V_x(t, X) \cdot \varphi \right) dt.$$

Sei nun $x = x(t)$ die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$\ddot{x}(t) = V_x(t, X) \quad \text{für } t \in [r, s] \quad \text{mit } x(r) = X(r) \quad \text{und } x(s) = X(s),$$

welche durch

$$x(t) = \frac{1}{s-r} \left(X(r)(s-t) + X(s)(t-r) + \int_r^t \int_t^s \int_\beta^\alpha V_x(\tau, X) d\tau d\beta d\alpha \right)$$

explizit angegeben werden kann. Dann gilt

$$\int_r^s (\dot{x} \cdot \dot{\varphi} + V_x(t, X) \cdot \varphi) dt = 0.$$

In Verbindung mit (4.24) liefert das

$$\int_r^s (\dot{x} - \dot{X}) \cdot \dot{\varphi} dt = 0.$$

Nun definieren wir φ als die Lösung von

$$\ddot{\varphi} = x - X \text{ in } [r, s] \text{ mit } \varphi(r) = \varphi(s) = 0.$$

Dann ist φ eine zulässige Testfunktion, und es gilt

$$0 = \int_r^s (\dot{x} - \dot{X}) \cdot \dot{\varphi} \, dt = (x - X) \cdot \dot{\varphi} \Big|_r^s - \int_r^s (x - X) \cdot \ddot{\varphi} \, dt,$$

wobei wegen $x(r) = X(r)$ und $x(s) = X(s)$ der erste Summand verschwindet. Aus $\ddot{\varphi} = x - X$ folgt somit

$$\int_r^s (x - X)^2 \, dt = 0,$$

also $x(t) = X(t)$ für $t \in [r, s]$. Daher ist X C^2 -Lösung von (EG) auf ganz \mathbb{R} , da r und s beliebig waren. Das beendet nicht nur den Beweis dieser Proposition, sondern auch den von Satz 9.

□

Anhang A

A.1 Beweis von Lemma 5

An dieser Stelle soll nun der Beweis der in Kapitel 2.4 aufgestellten Behauptung

$$(2.26) \quad \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{für } j < m, \\ m! & \text{für } j = m \end{cases}$$

erfolgen. Dies wird durch Induktion über m geschehen.
Induktionsanfang: $m = 1$

$$a) \quad j = 1 : -\binom{1}{0} 0^1 + \binom{1}{1} 1^1 = 1 = 1!$$

$$b) \quad j = 0 : -\binom{1}{0} 0^0 + \binom{1}{1} 1^0 = -1 + 1 = 0.$$

Induktionsschritt:

a) Zunächst sei $j = m+1$. Dann folgt wegen $\binom{m+1}{k} = \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} = \frac{m+1}{k} \binom{m}{k-1}$

für $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} k^{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \frac{m+1}{k} \binom{m}{k-1} k^{m+1} \\
&= (m+1) \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \binom{m}{k-1} k^m \\
&= (m+1) \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (k+1)^m \\
&= (m+1) \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \binom{m}{l} k^l \\
&= (m+1) \left(m! + \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \binom{m}{l} k^l \right) \\
&= (m+1)! + (m+1) \sum_{l=0}^{m-1} \binom{m}{l} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^l \\
&= (m+1)!,
\end{aligned}$$

da wegen $l \leq m-1 < m$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^l = 0$$

nach Induktionvoraussetzung gilt.

b) Sei nun $0 < j < m+1$, d.h. $j-1 < m$.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \binom{m+1}{k} k^j \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m+1-k} \frac{m+1}{k} \binom{m}{k-1} k^j \\
&= (m+1) \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} (k+1)^{j-1} \\
&= (m+1) \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \binom{j-1}{l} k^l \\
&= (m+1) \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j-1}{l} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^l = 0
\end{aligned}$$

nach Induktionsannahme wegen $l \leq j-1 < m$. Für $j=0$ ist dieses Ergebnis offensichtlich. \square

A.2 Satz von Liouville

Satz 10 (Liouville). *Sei*

$$\dot{x} = H_y(t, x, y), \quad \dot{y} = -H_x(t, x, y)$$

ein Hamilton-System einer Hamilton-Funktion $H \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt für den Fluß $\Phi = \Phi(t, t_0, x_0, y_0)$

$$\det(D_\zeta \Phi(t, t_0, \zeta)) = 1, \quad \zeta := (x_0, y_0).$$

Beweis von Satz 10. Wir definieren $z := (x, y)$ und schreiben das Hamilton-System als

$$\dot{z} = JD_z H(t, z), \quad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir

$$X(t, t_0, \zeta) := D_\zeta \Phi(t, t_0, \zeta).$$

Dann erfüllt X ein lineares Hamilton-System

$$\dot{X}(t) = D_\zeta JD_z H(t, \Phi(t, t_0, \zeta)) = JD_z^2 H(t, \Phi(t, t_0, \zeta))X(t, t_0, \zeta)$$

mit $X(t_0, t_0, \zeta) = I$, da $\Phi(t_0, t_0, \zeta) = \zeta$ gilt. Wir definieren nun

$$B(t) := D_z^2 H(t, \Phi(t, t_0, \zeta))$$

und

$$U(t) := X(t, t_0, \zeta)^T J X(t, t_0, \zeta).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{U}(t) &= \dot{X}(t, t_0, \zeta)^T J X(t, t_0, \zeta) + X(t, t_0, \zeta)^T J \dot{X}(t, t_0, \zeta) \\ &= (JB(t)X(t, t_0, \zeta))^T J X(t, t_0, \zeta) + X(t, t_0, \zeta)^T J^2 B(t)X(t, t_0, \zeta) \\ &= X(t, t_0, \zeta)^T B(t)^T J^T J X(t, t_0, \zeta) + X(t, t_0, \zeta)^T J^2 B(t)X(t, t_0, \zeta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $J^2 = -J^T J$ gilt.

Wegen $U(t_0) = J$ gilt also $U(t) \equiv J$. Daraus ergibt sich

$$(\det X(t, t_0, \zeta))^2 = 1.$$

Aufgrund von

$$\det X(t_0, t_0, \zeta) = 1$$

und der Stetigkeit der Determinante gilt somit wie behauptet

$$\det X(t, t_0, \zeta) \equiv 1.$$

□

Literaturverzeichnis

- [AL89] Marco Avellaneda and Fang-Hua Lin. Un théorème de Liouville pour des équations elliptiques à coefficients périodiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(5):245–250, 1989.
- [ALD83] S. Aubry and P. Y. Le Daeron. The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states. *Phys. D*, 8(3):381–422, 1983.
- [Aub82] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère equations*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Ban88] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. In *Dynamics reported, Vol. 1*, pages 1–56. Wiley, Chichester, 1988.
- [BLP78] Alain Bensoussan, Jacques-Louis Lions, and George Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.
- [Den87] Jochen Denzler. Mather sets for plane Hamiltonian systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 38(6):791–812, 1987.
- [GF63] I. M. Gelfand and S. V. Fomin. *Calculus of variations*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1963.
- [Gia83] Mariano Giaquinta. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
- [GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1983.
- [Hua98] Hai Huang. Destruction of invariant tori in pendulum-type equations. *J. Differential Equations*, 146(1):67–89, 1998.
- [Mat89] John N. Mather. Minimal measures. *Comment. Math. Helv.*, 64(3):375–394, 1989.

- [Mat91] John N. Mather. Variational construction of orbits of twist diffeomorphisms. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2):207–263, 1991.
- [Mos61] Jürgen Moser. On Harnack’s theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.
- [Mos86a] Jürgen Moser. Break-down of stability. In *Nonlinear dynamics aspects of particle accelerators (Santa Margherita di Pula, 1985)*, pages 492–518. Springer, Berlin, 1986.
- [Mos86b] Jürgen Moser. Minimal solutions of variational problems on a torus. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 3(3):229–272, 1986.
- [Mos86c] Jürgen Moser. Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Rev.*, 28(4):459–485, 1986.
- [Mos89] Jürgen Moser. Quasi-periodic solutions of nonlinear elliptic partial differential equations. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 20(1):29–45, 1989.
- [MS92] Jürgen Moser and Michael Struwe. On a Liouville-type theorem for linear and nonlinear elliptic differential equations on a torus. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 23(1-2):1–20, 1992.
- [Rab94] Paul H. Rabinowitz. Heteroclinics for a reversible Hamiltonian system. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 14(4):817–829, 1994.
- [Sen91] Walter Senn. Strikte Konvexität für Variationsprobleme auf dem n -dimensionalen Torus. *Manuscripta Math.*, 71(1):45–65, 1991.
- [You90] Jian Gong You. Invariant tori and Lagrange stability of pendulum-type equations. *J. Differential Equations*, 85(1):54–65, 1990.