# Mathematischer Vorkurs

technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

# Kapitel 1 – Mengen

## 1.1 Definition: Mengen

Unter einer *Menge* verstehen wir eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen.
Diese Objekte heißen dann *Elemente* der Menge.

Beschreibung von Mengen durch ...

- ... Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\ldots\}$.
- ... Angabe einer Eigenschaft $E$, die die Elemente beschreibt:

$$\{x \,|\, x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Beispiele:

- Die Menge der *natürlichen Zahlen*
  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Die Menge der *natürlichen Zahlen mit Null*
  $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ definieren wir
  $\mathbb{N}^{\geq k} := \{k, k+1, k+2, \ldots\}$.
- Die Menge der *ganzen Zahlen*: $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Die Menge der *rationalen Zahlen* als Menge der (gekürzten) Brüche:
  $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \text{ ganze Zahlen und } b > 0 \right\}$.
- Die Menge der *reellen Zahlen*: $\mathbb{R}$.
- Die Menge der *nicht negativen reellen Zahlen*: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.
- Die Menge der *komplexen Zahlen*: $\mathbb{C}$.
- Die *leere Menge* $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält.

Schreibweisen:

- Ist $a$ ein Element der Menge $M$, so schreiben wir kurz $a \in M$.
- Ist $a$ kein Element der Menge $M$, so schreiben wir kurz $a \notin M$.

Beispiel: $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$ aber $-3 \notin \mathbb{N}$.

## 1.2 Definition: Mengenoperationen

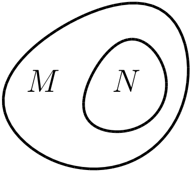
Es seien $M$ und $N$ Mengen.

1. Die *Vereinigungsmenge* $M \cup N$ ist die Menge der Elemente, die in $M$ oder in $N$ enthalten sind. Also $M \cup N = \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}$.
2. Die *Schnittmenge* $M \cap N$ ist die Menge der Elemente, die in $M$ und in $N$ enthalten sind. Also $M \cap N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}$.
3. $M$ heißt Teilmenge von $N$, wenn alle Elemente die in $M$ enthalten sind auch in $N$ enthalten sind. Wir schreiben dann $M \subset N$ oder $N \supset M$.
4. Die Differenzmenge $N \setminus M$ ist die Menge der Elemente, die in $N$ enthalten sind, aber nicht in $M$, also
$N \setminus M := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}$.
5. Ist $M \subset N$ so ist das *Komplement von* $M$ (*bezüglich* $N$) durch $M^c := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}$ definiert.

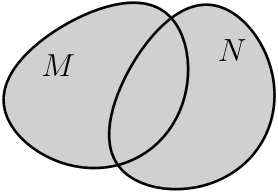
## 1.3 Bemerkung

- Es gilt in jedem Fall $\emptyset \subset M \subset M$.
- In 4. muss $M$ keine Teilmenge von $N$ sein. Ist zum Beispiel $M \cap N = \emptyset$, so ist $N \setminus M = N$ und $M \setminus N = M$.
- Ist aber $M \subset N$ so ist $N \setminus M = M^c$ und $M \setminus N = \emptyset$.
- Zwei Mengen $M$ und $N$ sind gleich, wenn die eine jeweils eine Teilmenge der anderen ist. Also $M = N$ genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.

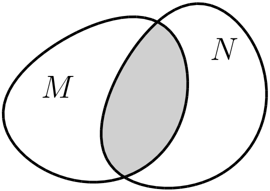
Graphisch kann man die Mengenoperationen gut mit Hilfe von *Venn-Diagrammen* darstellen:



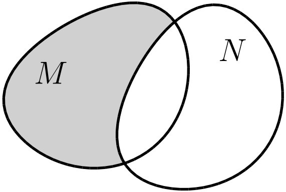

$N \subset M$




$M \cup N$




$M \cap N$




$M \setminus N$

## 1.4 Satz: Rechenregeln für Mengenoperationen

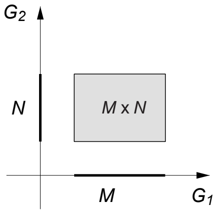
1. $M \cup N = N \cup M$ und $M \cap N = N \cap M$.
2. $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$ und $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.
3. $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$.
4. $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.
5. $(M^c)^c = M$.
6. $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$ und $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$.

## 1.5 Definition: Kartesisches Produkt

1. Das *kartesische Produkt* zweier Mengen $M$ und $N$ wird mit $M \times N$ bezeichnet und enthält als Elemente die geordneten Paare $(m, n)$ mit $m \in M$ und $n \in N$. Also:

$$M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M \text{ und } n \in N\}\,.$$

Ist $M \subset G_1$ und $N \subset G_2$ so kann man das kartesische Produkt wie folgt darstellen:



## 1.5 Definition: Kartesisches Produkt[cont.]

2. Das kartesische Produkt mehrerer Mengen $M_1, \ldots, M_k$ wird analog definiert.
   Z.B. ist $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$

## 1.6 Definition: Quantoren

Ist $A$ eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge $M$ sinnvoll ist, so schreiben wir

$$\forall x \in M : A(x)\,,$$

wenn jedes Element aus $M$ die Eigenschaft $A$ hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$ und

$$\exists x \in M : A(x)\,,$$

wenn es mindestens ein Element aus $M$ gibt, das die Eigenschaft $A$ hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

# Kapitel 2 – Zahlen

Uns bisher bekannte Zahlenbereiche sind

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \underbrace{(\subset \mathbb{C})}_{\text{später}} .$$

## 2.1 Definition: Rationale und irrationale Zahlen

1. $\mathbb{R}$ ist die Menge der Dezimalbrüche.
2. $\mathbb{Q}$ ist die Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche. Dabei wird allerdings die Periode $9$ ausgeschlossen, indem man die Zahl $n, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \overline{9}$ mit der Zahl $n, a_1 a_2 \dots a_{k-1} b_k$ identifiziert mit $b_k = a_k + 1$. Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$, $a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$, $a_k \in \{0, 1, \dots, 8\}$.
3. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbrüche, heißen *irrationale Zahlen*.

Beispiele irrationaler Zahlen:

1. Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge $1$ ist irrational. Diese Länge ist $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$
2. Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser $1$ ist irrational. Diese Länge ist $\pi = 3,141592654\ldots$
3. Die *Eulersche Zahl* $e = 2,718281828\ldots$ ist irrational.

## 2.2 Definition: Rechenoperationen

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ so sind die Rechenoperationen $x + y$, $x - y$, $xy$ und für $y \neq 0$ auch $\frac{x}{y}$ erklärt.

## 2.3 Satz: Rechenregeln

1. $x + y = y + x$ und $xy = yx$ (Kommutativgesetze)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ und $x(yz) = (xy)z$ (Assoziativgesetze)
3. $x(y + z) = xy + xz$ (Distributivgesetz)

Als direkte Konsequenz erhalten wir die drei Binomischen Formeln

4. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
   $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ und
   $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

## 2.4 Definition: Kurzschreibweisen für Summen und Produkte

Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ so schreiben wir

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ und
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Dabei kann der *Laufindex* eine beliebige Variable sein, etwa

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_j.$$

Es gelten die folgenden Vereinbarungen wenn $m > n$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

## Rechenregeln und Beispiele:

- $a \cdot \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (a \cdot a_k)$
- $\sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k = \sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$ und
- $\prod_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod_{k=m}^{n} b_k = \prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k)$.
- *Indexverschiebung*: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+t}^{n+t} a_{k-t}$.
- *Arithmetische Summenformel*: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- *geometrische Summenformel*: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für eine reelle Zahl $q \neq 1$.

## 2.5 Definition: Potenzen

Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^n := \prod_{k=1}^{n} a$.

Insbesondere gilt also $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$ aber $0^n = 0$ für $n > 0$.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$.

$a \in \mathbb{R}$ heißt die *Basis* und $n \in \mathbb{Z}$ der *Exponent* der *Potenz* $a^n$.

## 2.6 Potenzregeln

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

1. $a^m a^n = a^{n+m}$ und $a^n b^n = (ab)^n$ sowie
2. $(a^m)^n = a^{mn}$

falls die Ausdrücke definiert sind.

## 2.7 Definition: Quadratwurzel

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $b^2 = a$ so definieren wir

$$\sqrt{a} := \begin{cases} b & \text{falls } b \geq 0 \\ -b & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Die stets nicht-negative Zahl $\sqrt{a}$ heißt *Quadratwurzel von* $a$.

## 2.8 Existenz der Quadratwurzel

Die Gleichung $x^2 = a$ besitzt ...

- ... für $a < 0$ keine reelle Lösung,
- ... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und
- ... für $a > 0$ die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.

Der Satz 2.7 lässt sich noch verallgemeinern:

### 2.9 Satz: Höhere Wurzeln

1. Ist $n$ eine natürliche ungerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung und diese bezeichnen wir mit $x = \sqrt[n]{a}$.
2. Ist $n$ eine natürliche gerade Zahl mit $n \neq 0$, dann hat die Gleichung $x^n = a$ ...
   - ... für $a < 0$ keine reelle Lösung,
   - ... für $a = 0$ die eindeutige (reelle) Lösung $x = 0$ und
   - ... für $a > 0$ die zwei reellen Lösungen, die wir mit $x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ bezeichnen.

## 2.10 Bemerkung

Wir setzen nun $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$ und $n \neq 0$, und definieren(!) $a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$. Dann kann man zeigen, dass die Rechenregeln aus Satz 2.6 weiterhin gültig bleiben.
Somit haben wir das Potenzieren von ganzen auf rationale Exponenten erweitert.

## 2.11 Satz: $p$-$q$-Formel

Es sei $D := p^2 - 4q$. Dann besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ...

- ... die eindeutige (reelle) Lösung $x = -\frac{p}{2}$ falls $D = 0$,
- ... die zwei (reellen) Lösungen $x_1 = -\frac{p + \sqrt{D}}{2}$ und $x_2 = -\frac{p - \sqrt{D}}{2}$ falls $D > 0$, und
- ... keine reelle Lösung falls $D < 0$.

Die Zahl $D$ heißt *Diskriminante* der quadratischen Gleichung.

## 2.12 Definition: Fakultät und Binomialkoeffizient

1. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ ist die *Fakultät* definiert als

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

Also gilt insbesondere $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.

2. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ ist der *Binomialkoeffizient* definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

## 2.13 Satz: Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (Additionstheorem).

Wegen des Additiontheorems lassen sich die Binomialkoeffizienten im *Pascalschen Dreieck* anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccc|c}
 & & & & \binom{n}{k} & & & & & n \\
\hline
 & & & & 1 & & & & & 0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \\
 & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

## 2.14 Binomischer Lehrsatz

Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$