Mathematischer Vorkurs

technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Kapitel 3 – Teilbarkeit

Division (mit Rest) einer ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$ durch eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ liefert folgende Darstellung von a:

3.1 Lemma: Division mit Rest

Seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eindeutige $l \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit

$$a = ln + r$$

Beachte: Der Rest r liegt stets zwischen 0 und $n - 1$.

3.2 Definition: Teilbarkeit

Wir sagen $n|a$, gesprochen: „n teilt a“, wenn $r = 0$, d.h. wenn $a = ln$.

3.3 Satz

Es seien $a \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n|a$.

1. Ist $a = b + c$ (mit $b, c \in \mathbb{Z}$), dann gilt:

$$n|b \Longleftrightarrow n|c$$

2. Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $n|ka$.

Bemerkung: Ist $a = bc$ mit $b, c \in \mathbb{Z}$, so lässt sich zunächst nicht viel sagen, insbesondere gilt nicht allgemein, dass $n|b$ oder $n|c$.
Die Zahlen n, für die das gilt, sind besondere Zahlen. Siehe dazu Defniniton 3.5

3.4 Beispiel

1. Zeigen Sie: Die Summe von 5 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist duch 5 teilbar.
2. Frage: Gilt dies auch allgemein? D.h.: Ist die Summe von n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen durch n teilbar?
3. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt es?

Die erste Aussage war eine Aufgabe der Mathe-Olympiade für die 5./6. Klasse.

Besondere Teiler sind die Primzahlen. Gerne verwendet wird die Eigenschaft: $p \in \mathbb{N}$ mit $p \neq 1$ heißt Primzahl, wenn p nur durch 1 und sich selbst teilbar ist. Oder: Eine Primzahl p besitzt keine echten Teiler.

Diese Eigenschaft wird immer wieder verwendet, jedoch nicht als Definition. Definiert werden Primzahlen mit Hilfe der Eigenschaft, die nach Satz 3.3 schon erwähnt wurde.

3.5 Definition: Primzahlen

Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt <u>Primzahl</u>, wenn gilt:

$$p|(mn) \Rightarrow p|m \text{ oder } p|n$$

3.6 Beispiel:

1. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
2. $\sqrt{2}$ ist nicht rational.

3.7 Satz: Zerlegung in Primfaktoren

Jede natürliche Zahl besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren. Diese Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Die Berechnung der Primfaktorzerlegung ist nur durch Ausprobieren möglich. Einen Algorithmus dafür gibt es nicht.

Gleiche Faktoren werden üblicherweise zu Potenzen zusammengefasst und die Primfaktoren der Größe nach sortiert:

$$\begin{aligned} 15288 &= 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13 \\ 2772 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

In der Bruchrechnung müssen wir Brüche erweitern und kürzen. Dazu benötigen wir:

3.8 Definition und Satz: ggT und kgV

Gegeben seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit Primfaktorzerlegungen

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n} \text{ und } b = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{l_n},$$

$k_1, \ldots, k_n, l_1, \ldots, l_n \in \mathbb{N}_0$.
Weiter seien für $j = 1, \ldots, n$

$$M_j := \max\{k_j, l_j\} \text{ und } m_j := \min\{k_j, l_j\}.$$

Dann heißen

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(a,b) &:= p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{m_n} \\ &\quad \text{der \underline{größte gemeinsame Teiler} von } a \text{ und } b \text{ und} \\ \mathrm{kgV}(a,b) &:= p_1^{M_1} \cdot p_2^{M_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{M_n} \\ &\quad \text{das \underline{kleinste gemeinsame Vielfache} von } a \text{ und } b. \end{aligned}$$

3.9 ggT und kgV in der Praxis

Für $a = 15288 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 13$ und $b = 2772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(15288, 2772) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \text{ und} \\ \mathrm{kgV}(15288, 2772) &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 504504. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt stets

$$\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = a \cdot b.$$

Mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus ($\longrightarrow$ 1. Semester) lässt sich der ggT berechnen, ohne mühsam eine Primfaktorzerlegung zu machen.

Wir wollen im folgenden ein wenig mit Resten bei Division durch ein $n \in \mathbb{N}$ rechnen und z.B. einige Teilbarkeitsregeln herleiten.

Wählt man das n und lässt es dann fest, kann man mit den Resten der Division durch n wie folgt rechnen:

3.10 Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Seien weiter $a, b \in \mathbb{Z}$ mit Resten (bei Division durch n) r_a und r_b, dann gilt:

1. $a + b$ hat denselben Rest (bei Division durch n) wie $r_a + r_b$.
2. $a - b$ hat denselben Rest (bei Division durch n) wie $r_a - r_b$.
3. $a \cdot b$ hat denselben Rest (bei Division durch n) wie $r_a \cdot r_b$.

Folgende Schreibweisen sind gebräuchlich, beide bedeuten: „a hat denselben Rest bei Division durch n wie r_a:

1. $\overline{a} =_n \overline{r_a}$
2. $a \equiv r_a \bmod n$.

Wir verwenden die erste Schreibweise.

Damit lässt sich der letzte Satz wie folgt formulieren:

3.10 Satz

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

1. $\overline{a+b} =_n \overline{a} + \overline{b}$.
2. $\overline{a-b} =_n \overline{a} - \overline{b}$.
3. $\overline{a \cdot b} =_n \overline{a} \cdot \overline{b}$.

<u>Bemerkung</u>: Mit Satz 3.7 lassen sich diverse Rechenregeln aus Kapitel 2 übertragen, z.B.:

1. $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) =_n \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c}$
2. $\left(\overline{a} + \overline{b}\right)^2 =_n \overline{a}^2 + 2\overline{a}\,\overline{b} + \overline{b}^2$

Vorsicht mit der 2!

3.11 Beispiel

1. $\overline{83} + \overline{-5} =_7 \overline{1}$.
2. $\overline{83} + \overline{-5} =_9 \overline{6}$.
3. $\overline{3112} \cdot \overline{722} =_3 \overline{2}$

Mit Hilfe dieser Rechenregeln kann man z.B. einige Teilbarkeitsregeln herleiten. Dazu zerlegt man eine Zahl in die Zehnerpotenzdarstellung:

Sei $a = \underbrace{a_k\, a_{k-1} \ldots a_2\, a_1\, a_0}_{\text{Ziffern}}$. Dann ist

$$a = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + \ldots + a_k \cdot 10^k = \sum_{j=0}^{k} a_j 10^j.$$

Also gilt: $\overline{a} =_n \sum_{j=0}^{k} \overline{a_j}\,\overline{10}^j$.

3.12 Teilbarkeitsregeln

Eine natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$, $a = \sum_{j=0}^{k} a_j 10^j$ ist genau dann teilbar durch …

1. …2, wenn sie gerade ist, d.h. wenn a_0 durch 2 teilbar ist
2. …3, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, d.h. wenn $\sum_{j=0}^{k} a_j$ durch 3 teilbar ist.
3. …6, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.

Eine weitere Anwendung des Rechnen mit Resten hat man bei Codes, wie z.B. den ISBN- oder EAN-Codes. Wir schauen uns den alten 10-stelligen ISBN-Code an, er ist interessanter als der neue 13-stellige.

3.13 Beispiel: Der 10-stellige ISBN-Code

Jedes Buch erhält eine eindeutige Nummer, bestehend aus

$$\underbrace{3}_{\text{Land}} - \underbrace{540}_{\text{Verlag}} - \underbrace{42535}_{\text{Buch}}$$

Um Übertragunsfehler zu erkennen, fügt man noch eine Kontrollziffer a_{10} hinzu, die aus den ersten neun Ziffern $a_1, \dots, a_9$ wie folgt berechnet wird:

$$\overline{a_{10}} =_{11} \sum_{j=1}^{9} \overline{j \cdot a_j}$$

Also ist die Prüfziffer für dieses Buch die 7 und der vollständige ISBN-Code lautet

$$3 - 540 - 4235 - 7.$$

Ergibt sich der Rest 10, so wird als Prüfziffer ein X verwendet.

Der ISBN-Code erkennt folgende Fehler:

1. eine falsch übertragene Ziffer (inkl. Prüfziffer)
2. einen Zahlendreher (auch nicht nebeneinander liegende Zahlen)
3. eine verloren gegangene Ziffer (wenn deren Position bekannt ist)

Der ISBN-Code erkennt nicht

1. wo der Fehler ist oder wie er behoben werden kann,
2. zwei oder mehr Fehler

Kapitel 4 – Ordnung und Betrag

4.1 Definition: Ordnung

Jede reelle Zahl x hat genau eine der folgenden drei Eigenschaften:
$x < 0$ (negativ), $x = 0$ (Null) und $x > 0$ (positiv).
Wir definieren $x > y$ durch $x - y > 0$ und $x \geq y$ durch $x - y > 0$ oder $x - y = 0$.
Analog werden $x < y$ und $x \leq y$ definiert.

Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ entweder(!) $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.

Die Zeichen $\leq, \geq, <, >$ und $=$ heißen *Ordnungszeichen*.

Mit Hilfe der Ordnungszeichen definieren wir spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$. Seien dazu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

4.2 Definition: Intervalle

Beschränkte Intervalle

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$ (*Abgeschlossenes Intervall*, auch $a = b$ möglich).
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ (*Offenes Intervall*).
- $[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$ oder $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$ (*Halboffene Intervalle*).

Unbeschränkte Intervalle:

- $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x\}$ und $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq b\}$
- $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\}$ und $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$
- $]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}$

4.3 Rechenregeln

Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. Ist $x < y$ und $y < z$, dann gilt $x < z$.
2. Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $x = y$.
3. Ist $x < y$ dann ist $x + z < y + z$.
4. Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $xy > 0$.
5. Ist $z > 0$ und $x < y$, so ist $xz < yz$.
6. Ist $z < 0$ und $x < y$, so ist $xz > yz$.
7. Ist $0 < x < y$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.

Aus den Rechenregeln 4.3 folgt:

4.4 Satz: Vorzeichen von Produkten

Es seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass es mindestens ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt mit $x_j = 0$.
- $\prod_{i=1}^{n} x_i > 0$ ist gleichbedeutend damit, dass nur eine gerade Anzahl der Faktoren x_j negativ ist.

Die Rechenregeln 4.3 liefern für das Rechnen mit Ungleichungen:

4.5 Bemerkung

Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn wir auf beiden Seiten ...

- ... eine Zahl addieren.
- ... mit einer positiven Zahl multiplizieren.
- ... eine streng monoton steigende Funktion anwenden. (Genaueres dazu folgt später.)

<u>Beispiele streng monotoner Funktionen:</u>

- Die Wurzelfunktion auf $[0, \infty[$.
- Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten auf $\mathbb{R}$ und mit geradem Exponenten auf $[0, \infty[$.
- Die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ und die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$.

4.6 Definiton: Betrag

Der *Betrag* einer reellen Zahl x ist definiert als der Abstand zu 0 und wird mit $|x|$ bezeichnet. Also

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand von x und y.

4.7 Eigenschaften des Betrags

1. $|x| = 0$ ist gleichbedeutend mit $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $-|x| \leq x \leq |x|$ mit Gleichheit an genau einer Stelle, wenn $x \neq 0$.
4. $|xy| = |x||y|$.
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$.
6. $\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|$.
7. $\sqrt{x^2} = |x|$.

4.8 Satz: Quadratische Ungleichungen

Es gilt

$$x^2 + px + q < 0 \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| < \frac{\sqrt{D}}{2},$$

wobei $D = p^2 - 4q$ die Diskriminante ist. Ist $D < 0$ so hat die Ungleichung keine reelle Lösung. Außerdem gilt

$$x^2 + px + q > 0 \Leftrightarrow \left|x + \frac{p}{2}\right| > \frac{\sqrt{D}}{2},$$

wobei im Fall $D < 0$ die Lösungsmenge ganz $\mathbb{R}$ ist.

Kapitel 5 – Vollständige Induktion

Die *Vollständige Induktion* ist ein Beweisverfahren, mit dem man Allaussagen für Aussageformen beweisen kann, deren Grundbereich die natürlichen Zahlen sind.

Ist nun $\mathcal{A}$ eine Aussageform über $\mathbb{N}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathcal{A}(n)$ eine Aussage, so ist die zugehörige All-Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \mathcal{A}(n)$$

<u>Bemerkung:</u> Manchmal ist es sinnvoll oder notwendig statt ganz $\mathbb{N}_0$ nur $\mathbb{N}^{\geq k}$ zu betrachten. Zum Beispiel gilt die Allaussage für die Aussageform $\mathcal{A}(n) :\Longleftrightarrow n - 2 > 0$ nur für $\mathbb{N}^{\geq 3}$.

Bevor wir zu einigen Beispielen und Anwendungen kommen formulieren wir zuerst einmal das Induktionsprinzip

5.1 Satz: Vollständige Induktion

Es sei $\mathcal{A}$ eine Aussageform über $\mathbb{N}^{\geq k}$ und es gelte

(IA) $\mathcal{A}(k)$ ist wahr.

sowie

(IS) Ist $\mathcal{A}(n)$ wahr, so ist auch $\mathcal{A}(n+1)$ wahr
(oder kurz: $\mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{A}(n+1)$).

Dann ist $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq k}$ wahr.

(IA) nennt man auch den *Induktionsanfang* und (IS) den *Induktionsschluss*.

Die folgenden Aussagen sind typisch für einen Induktionsbeweis.

5.2 Beispiele: Summen, Gleichungen

1. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.
3. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
5. Es gilt $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

5.3 Beispiele: Ungleichungen

6. Es sei $x > -1$ eine feste reelle Zahl. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

   $(1+x)^n \geq 1 + nx$
7. Ist $x \neq 0$ so gilt 6. mit "$>$" für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.
8. Es sei $p \geq 2$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p^n \geq n$.
9. Es sei $p \geq 3$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $p^n \geq n^2$.
10. Für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 5}$ gilt $2^n > n^2$.
11. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

5.4 Beispiele: Teilbarkeit

12. 3 teilt $13^n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
13. 3 teilt $2^{2n+1} + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
14. 6 teilt $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

5.5 Beispiele: Ableitungen

15. Es ist $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
16. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: Ist $f(x) = x^n$, dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.
17. Es sei $f(x) = e^{-x^2}$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein Polynom p_n vom Grad n, so dass $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$.
18. Es sei $f(x) := \dfrac{1}{ax+b}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
19. Es sei $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)$.
20. Es sei $f_n(x) = x^n$. Dann ist $\displaystyle\int f_n(x)\,dx = \frac{x}{n+1} f_n(x) + c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.