Mathematischer Vorkurs

technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Kapitel 6 – Abbildungen und Funktionen

6.1 Definition: Abbildung

Es seien D und W Mengen. Eine *Abbildung* f *von* D *nach* W ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in W$ zuordnet.
$f(x)$ heißt das *Bild* von x unter f
D heißt der *Definitions*- und W der *Wertebereich* (manchmal besser Wertevorrat.

Ist nun $f : D \to W$ eine Abbildung, so heißt die Menge der Elemente in W, die von f getroffen wird, die *Bildmenge von* f und wird mit $f(D)$ bezeichnet. Es gilt

$$f(D) := \{y \in W \,|\, \exists x \in D : y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in D\} \subset W\,.$$

6.2 Definition, Urbild, Graph

Ist $U \subset W$ eine Teilmenge, so nennt man die Menge aller Elemente von D deren Bild in U liegt, das *Urbild von* U. Dies wird mit $f^{-1}(U)$ bezeichnet. Es gilt

$$f^{-1}(U) := \{x \in D \,|\, f(x) \in U\} \subset D\,.$$

Die Teilmenge $\{(x, f(x)) \,|\, x \in D\} \subset D \times W$, bezeichnet man als *Graph der Abbildung* f.

6.3 Bemerkung

Zwei Abbildungen $f_1 : D_1 \to W_1$ und $f_2 : D_2 \to W_2$ sind genau dann gleich, wenn $D_1 = D_2$, $W_1 = W_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D_1$.

6.4 Definition: identische Abbildung

Es sei $f : D \to D$ mit $f(x) := x$ für alle $x \in D$. Diese Abbildung heißt *identische Abbildung* oder *Identität* auf D und wird hier mit id_D bezeichnet.

Sprechweise:

Oft wird der Begriff Funktion parallel zum Begriff Abbildung benutzt.

6.5 Definition: Polynome

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ein *Polynom*.
Die Zahl $\operatorname{grad}(p) := n$ heißt der *Grad*, die a_k heißen die *Koeffizienten* und speziell a_n der *Leitkoeffizient* von p.
Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$ heißt *Nullstelle* von p.

6.6 Satz: Faktorisierung

Es sei p ein Polynom und x_0 eine Nullstelle. Dann gibt es ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) = \mathrm{grad}(p) - 1$, so dass $p(x) = (x - x_0)q(x)$.

Die Koeffizienten des Polynoms q aus der Faktorisierung lassen sich durch *Polynomdivision* oder mit Hilfe des *Hornerschemas* bestimmen.

6.7 Hornerschema

Das Hornerschema kann dazu benutzt werden, den Funktionswert eines Polynoms p an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen.
Man erhält zusätzlich die Koeffizienten eines Polynoms q, dessen Grad um Eins kleiner ist, als der von p, und das

$$p(x) = (x - x_0)q(x) + p(x_0)$$

erfüllt.

Beschreibung des Hornerschemas:

Zunächst schreiben wir die Koeffizienten von p in die erste Zeile einer Tabelle und den Wert 0 unter a_n. Dann führt man dann von links nach rechts in der Tabelle immer wieder zwei Schritte durch:

1. Addiere die Zahlen der ersten und zweiten Zeile und schreibe sie in die dritte Zeile.
2. Der zuletzt berechnete Wert wird mit x_0 multipliziert und in die zweite Zeile der nächsten Spalte eingetragen.

Schließlich gelangt man zu folgendem Abschlußschema:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \cdots & & a_1 & & a_0 \\
\hline
+ & & + & & + & & & & + & & + \\
0 & & c_{n-1}x_0 & & c_{n-2}x_0 & & \cdots & & c_1x_0 & & c_0x_0 \\
= & \nearrow & = & \nearrow & = & \nearrow & & \nearrow & = & \nearrow & = \\
\hline
c_{n-1} & & c_{n-2} & & c_{n-3} & & \cdots & & c_0 & & c_{-1}
\end{array}
$$

Dann ist $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 =$
$(x - x_0)(c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots c_1 x + c_0) + c_{-1}$.

Ist x_0 eine Nullstelle des Polynoms p, so hat man eine Polynomdivision durchgeführt:

$p(x) = (x - x_0) q(x)$ mit $q(x) = c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots c_1 x + c_0$.

Man kann nun 6.7 auf q anwenden und so nach und nach Nullstellen von p abspalten.

Hilfreich beim Nullstellensuchen:

Hat p nur ganzzahlige Koeffizienten, und ist der Leitkoeffizient $a_n = 1$, so sind alle rationalen Nullstellen sogar ganz und sie sind Teiler des Koeffizienten a_0. .

6.8 Definition: Rationale Funktionen

Es seien p und q Polynome. Dann heißt die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *rationale Funktion*. Ihr Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

6.9 Definition: Potenzfunktion

Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Dann ist die Potenzfunktion definiert durch

i) $f_q :]0, \infty[\to]0, \infty[$, $f_q(x) = x^q$, falls $q < 0$,

ii) $f_q : \ [0, \infty[\to \ [0, \infty[$, $f_q(x) = x^q$, falls $q > 0$.

Bemerkung: Später werden wir die Potenzfunktionen auch für irrationale Exponenten erklären.

6.10 Definition: Einschränkung und Fortsetzung

Es seien $D_1 \subset D_2$ und $f_1 : D_1 \to W$, $f_2 : D_2 \to W$ zwei Abbildungen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D_1$.
Dann heißt f_1 *Einschränkung von* f_2 und f_2 *Fortsetzung von* f_1. Man schreibt auch $f_1 = f_2|_{D_1}$.

6.11 Definition: Verkettung von Abbildungen

Es seien $f : D \to U$ und $g : V \to W$ Abbildungen und es gelte $U \subset V$.
Dann ist die *Verkettung* $g \circ f : D \to W$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \,.$$

Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Komposition und man liest $g \circ f$ als “g nach f”.

6.12 Definition: Umkehrabbildung

Es seien $f : D \to W$ und $g : W \to D$ Abbildungen mit den Eigenschaften (1) $g \circ f = \mathrm{id}_D$ und (2) $f \circ g = \mathrm{id}_W$.
Dann heißen f und g *Umkehrabbildungen* voneinander und wir schreiben $g = f^{-1}$ bzw. $f = g^{-1}$. Man sagt dann auch f (und natürlich auch g) ist *invertierbar*.

Eine Abbildung $f : D \to W$ hat genau dann eine Umkehrabbildung, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in W$ genau eine Lösung $x \in D$ hat.

Die Umkehrabbildung ist dann (für dieses (x, y)-Paar) durch $f^{-1}(y) = x$ definiert.

Sind D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$, so erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der winkelhalbierenden.

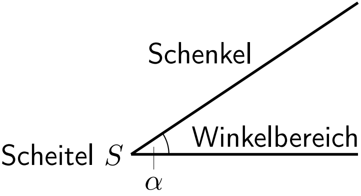
6.13 Definition: Monotonie

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f ...

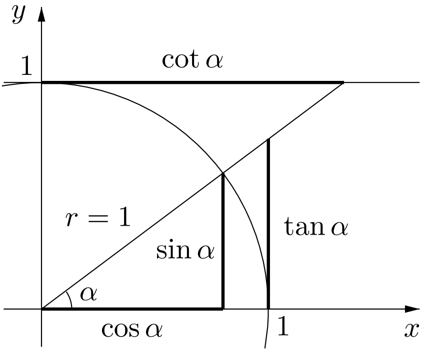
1. ... *monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$.
2. ... *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$.
3. ... *monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \geq f(x_2)$.
4. ... *streng monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) > f(x_2)$.

Beispiel: Die Potenzfunktionen $f_q : [0, \infty[\to [0, \infty[$ sind streng monoton steigend.

Kapitel 7 – Trigonometrie



Winkel werden in *Grad* oder im *Bogenmaß* (auch *Rad*) angegeben: $360° \widehat{=} 2\pi$.

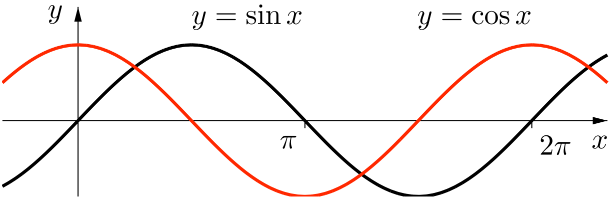


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

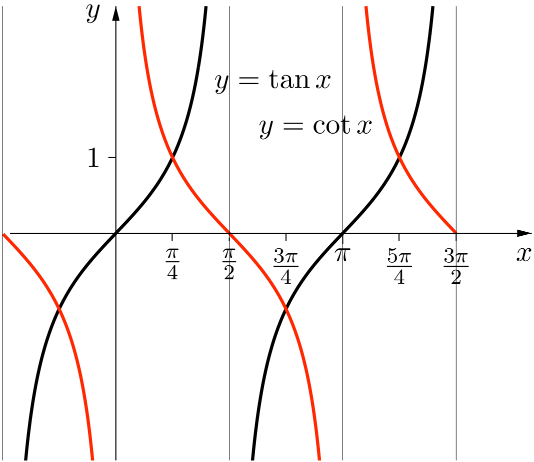
7.1 Definition: Winkelfunktionen

Name		D	W
Sinus	$\sin$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Cosinus	$\cos$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Tangens	$\tan$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Cotangens	$\cot$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

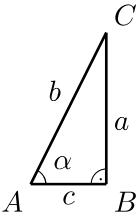
Die Graphen der Sinus- und Cosinusfunktionen



Die Graphen der Tangens- und Cotangensfunktionen:



7.2 Interpretation am rechtwinkligen Dreieck



Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\,, \quad \cos\alpha = \frac{c}{b} \quad \text{und} \quad \tan\alpha = \frac{a}{c}$$

7.3 Definition: Periodische Funktionen

Es sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-*periodisch*, wenn $f(x + T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

7.4 Definition: Symmetrie von Funktionen

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
2. ... *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$.

7.5 Satz: Eigenschaften der Winkelfunktionen

1. $\sin$ sowie $\cos$ sind 2π- und $\tan$ sowie $\cot$ sind π-periodisch.
2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ und $\cos(x+\pi) = -\cos x$.
3. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$.
4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ und $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.
5. $\cos$ ist eine gerade Funktion und $\sin$, $\tan$ und $\cot$ sind ungerade Funktionen.
6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \leq 1$ und $|\cos x| \leq 1$.
7. $\sin(x) = 0$ genau dann, wenn $x = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
   $\cos(x) = 0$ genau dann, wenn $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ der *Trigonometrische Pythagoras*.
9. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ und $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x}$.

7.6 Einschränkungen der Winkelfunktionen

Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen benutzt man zur Definiton von Umkehrfunktionen:

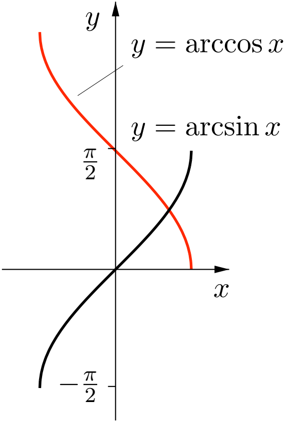
1. $\sin\big|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ ist streng monoton wachsend.
2. $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ ist streng monoton fallend.
3. $\tan\big|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend.
4. $\cot\big|_{]0,\pi[} :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.

7.7 Definition: Arcusfunktionen

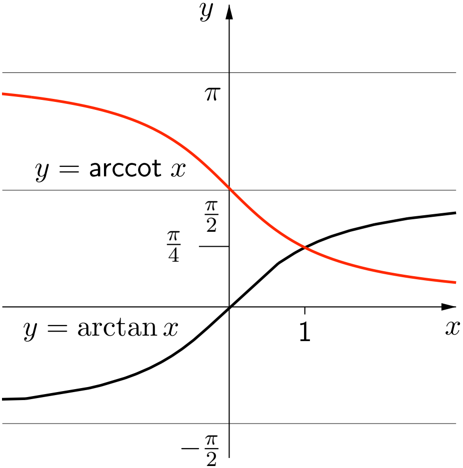
Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

1. $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
3. $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
4. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus (siehe Bemerkung 6.12):



y
$y = \arccos x$
$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$



y
π
$y = \text{arccot } x$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
$y = \arctan x$
1
x
$-\frac{\pi}{2}$

Beim Rechnen mit den Winkelfunktionen sind folgende Additionstheoreme sehr nützlich:

7.8 Satz: Additionstheoreme

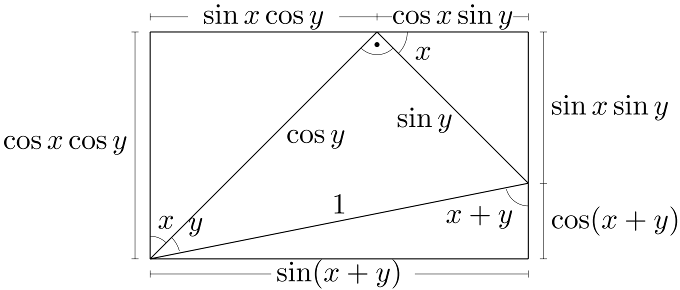
1. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$
2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
3. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man dann

7.9 Folgerung: Doppelte Winkel

1. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
2. $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan(2x) = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2x)\big)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big)$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme:



Und nun noch ein paar spezielle Werte der Winkelfunktionen (und mit den Additionstheoremen und der Periodizität dann natürlich weitere).

x in Grad x in Rad	0 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$
$\cot x$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Eselsbrücke für die Sinus-Werte:

x in Grad	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Kapitel 8 – Differenzierbarkeit

Die Begriffe *Grenzwert* und *Stetigkeit* werden in Mathematikvorlesungen genau definiert. Hier sollen lediglich die Ideen verdeutlicht werden.

8.1 Grenzwert und Stetigkeit

Sei I ein Intervall und x_0 ein Punkt in I oder ein Randpunkt.
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat in x_0 den *Grenzwert* a, wenn sich die Werte $f(x)$ nur um beliebig wenig von a unterscheiden, wenn x immer näher an x_0 rückt. $f(x_0)$ selbst wird dabei nicht betrachtet.
Schreibweisen: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \to a$ für $x \to x_0$.
Die Funktion f nennt man *stetig* in $x_0 \in I$, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ ist.
f ist stetig auf I, wenn f in jedem Punkt von I stetig ist.

Beispiele unstetiger Funktionen sind Funktionen mit Sprungstellen oder Polstellen.

8.2 Definition: Differenzierbarkeit

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$. f heißt ...

1. ... *differenzierbar in dem Punkt* $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert des *Differenzenquotienten*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

   existiert. Dieser Wert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt die *Ableitung* von f an der Stelle x_0.

2. ... *differenzierbar auf* I, wenn f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist.

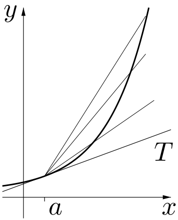
8.3 Grundlegende Beispiele

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	
x	1	
x^2	$2x$	
x^n	$n \cdot x^{n-1}$,	$n \in \mathbb{N}$

$f(x)$	$f'(x)$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$,	$n \in \mathbb{N}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

Wichtige Beobachtung: In der rechten Spalte taucht $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nie auf!

Die Ableitung einer Funktion f kann man auch geometrisch interpretieren.



Die Steigung der Tangente T im Punkt a ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

8.4 Tangente

Die Gerade mit der Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

heißt *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ (kurz auch: Tangente an f in x_0).

Bemerkung: Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet also anschaulich, dass sich die Funktionswerte von f in einer "kleinen Umgebung von x_0" gut durch die Werte der Tangente annähern lassen. Man sagt auch: f ist *linear approximierbar*. Genauer:

8.5 Satz: Lineare Approximation

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist differenzierbar in x_0.
2. Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = 0$ und
$$f(x) = f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \phi(x) \cdot (x - x_0)\,.$$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

8.6 Satz

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.

8.7 Definition: Höhere Ableitungen

1. Ist f auf I differenzierbar, so heißt die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die *Ableitung* von f.
2. Ist f differenzierbar, und f' stetig auf I so nennt man f *stetig differenzierbar*.
3. Sind f und f' differenzierbar auf I, dann nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die *zweite Ableitung* von f.
4. Ebenso definiert man höhere Ableitungen f''', $f^{(4)}$, ...
5. f heißt k-*mal stetig differenzierbar*, wenn $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.

8.8 Satz: Differentiationsregeln

1. *Vielfache* $(cf)' = cf'$
2. *Summenregel* $(f+g)' = f' + g'$
3. *Produktregel* $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. *Quotientenregel* $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
5. *Kettenregel* $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

Insbesondere ist

1. $(f^2)'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.
2. $(f^n)'(x) = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$.
3. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

8.9 Satz: Ableitung der Umkehrfunktion

Es sei f auf dem Intervall I streng monoton und differenzierbar und es gelte $f' \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar auf $J := f(I)$. Für $y = f(x) \in J$, also $x = f^{-1}(y)$, gilt dann

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

8.10 Anwendungen

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

Kapitel 9 – Anwendungen der Differentialrechnung

9.1 Satz: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Es sei f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x_0 \in]a,b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

9.2 Folgerung

Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt:

1. Ist $f'(x) \geq 0$ (> 0) für alle $x \in]a,b[$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton steigend.
2. Ist $f'(x) \leq 0$ (< 0) für alle $x \in]a,b[$, so ist f auf $[a,b]$ (streng) monoton fallend.
3. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a,b[$, so ist f auf $[a,b]$ konstant.

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden dann mit I bezeichnet).

9.3 Satz: Krümmung

Es se $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...

1. ... *linksgekrümmt*, falls $f'' > 0$ auf ganz I.
2. ... *rechtsgekrümmt*, falls $f'' < 0$ auf ganz I.

9.4 Definition: Wendestelle, Wendepunkt

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in I$ und $f''(x)$ habe in x_0 einen Vorzeichenwechsel. Dann heißt x_0 eine *Wendestelle* und der Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ ein *Wendepunkt* (des Graphen) von f.

9.5 Definition: Extremum

Es sei $D \in \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (Der Graph von) f hat in x_0 ein ...

1. ...*globales Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2. ...*globales Minimum*, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
3. ...*lokales Maximum*, wenn es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in I \cap D$.
4. ...*lokales Minimum*, wenn es ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in I \cap D$.

Maxima und Minima fassen wir auch unter dem Namen *Extrema* zusammen. Wir nennen x_0 eine *Extremalstelle*, $f(x_0)$ ein *Extremum* und $(x_0, f(x_0))$ einen *Extrempunkt* (des Graphen) von f.

9.6 Satz: Notwendiges Kriterium für Extrema

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Die Umkehrung dieses Satzes ist in der Regel nicht richtig. Das zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$.

Das Phänomen des letzten Beispiels werden wir nun näher beleuchten.

9.7 Satz: Hinreichendes Kriterium für Extrema

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

1. Ist $f''(x_0) \begin{Bmatrix} < 0 \\ > 0 \end{Bmatrix}$, so hat f in x_0 ein $\begin{Bmatrix} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{Bmatrix}$.
2. Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f in x_0 eine Wendestelle. In diesem Fall spricht man von einem *Sattelpunkt*.

Allgemeiner gilt:

3. Ist $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$, dann gilt
   - Ist n gerade, so hat f in x_0 ein
     $$\begin{cases} \text{lokales Maximum,} & \text{falls } f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \text{lokales Minimum,} & \text{falls } f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}.$$
   - Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$. Da die Funktion 2π-periodisch ist, schauen wir sie uns nur auf einem Teilintervall an, nämlich auf $[0, 2\pi]$. (genauer auf $]-\delta, 2\pi + \delta[$, da wir ein offenes Intervall brauchen).