Mathematischer Vorkurs

technische universität
dortmund

fakultät für
mathematik

Kapitel 10 – Lineare Gleichungssysteme

10.1 Definition: Lineares Gleichungssystem – LGS

Ein (reelles) *lineares Gleichungssystem (LGS)* mit n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und m Gleichungen hat folgende Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$.
Die a_{ij} nennen wir die *Koeffizienten* des LGS und die b_j nennen wir die *rechte Seite* des LGS.
Das LGS heißt *homogen*, wenn die rechte Seite nur aus Nullen besteht.

Kurzschreibweise: Statt der Form in oben benutzen wir auch die etwas kompaktere Schreibweise

$$(A|b) := \left.\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right. .$$

10.2 Definition: Lösungsmenge

Die Lösungsmenge des LGS $(A|b)$ bezeichnen wir mit

$$L(A,b) := \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1,\dots,x_n) \text{ löst } (A|b)\big\}$$

10.3 Satz: Gauß-Operationen

Die folgenden Operationen verändern die Lösungsmenge eines LGS nicht:

1. Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$.
2. Vertauschen von Zeilen.
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.
4. Vertauschen von Spalten

Achtung: Wenn man Punkt 4. anwendet, muss man sich merken, welche Variable zu welcher Spalte gehört!

10.4 Satz: Gauß-Algorithmus

Es sei $(A|b)$ ein lineares Gleichungssystem, dann kann man durch geeignete Gauß-Operationen erreichen, dass das LGS die folgende Form bekommt:

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
y_1 & y_2 & \cdots & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_n & \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & c_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Die y_j sind die Variablennamen x_1 bis x_n, aber eventuell in vertauschter Reihenfolge.

Praktische Durchführung des Gauß-Algorithmus:

① Wir versuchen durch 3.(Tausch von Zeilen), 4.(Tausch von Spalten) und 1.(Skalierung einer Zeile) eine "1" in die obere linke Ecke zu bekommen.

(Ist dies nicht möglich, dann endet der Algorithmus, denn die Koeffizienten, mit denen man diesen Schritt gestartet hat, sind alle Null.)

② Durch Anwenden von 2.(Addition von Zeilen) erzeugen wir Nullen unterhalb und oberhalb dieser "1".

③ Wir beginnen nun wieder mit Step1. Allerdings wenden wir ihn auf das kleinere System an, das wir durch Löschen der ersten Spalte und ersten Zeile erhalten.

Kapitel 11 – Vektoren

11.1 Definition: Vektoren im Zahlenraum

Ein *Vektor* (im Zahlenraum) mit n Komponenten ist ein n-Tupel reeller Zahlen, also ein Element aus $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben die Komponenten eines Vektors in eine Spalte:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

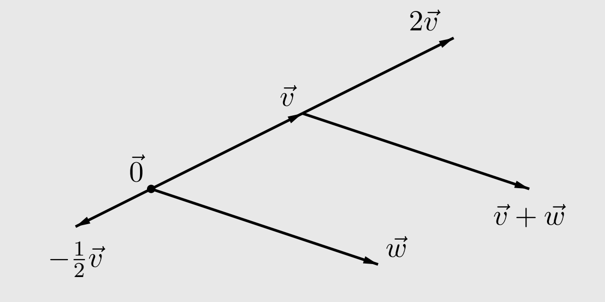
(Manchmal benutzen wir die platzsparende Schreibweise $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$, wobei das ^{T} andeutet, dass wir eigentlich einen Spaltenvektor meinen).

11.2 Definition: Rechnen mit Vektoren

Mit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$ und

$$\alpha \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}.$$

Wir beschränken uns in den kommenden Betrachtungen auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, obwohl alles auch im Höherdimensionalen und allgemeineren Situationen richtig bleibt.



11.3 Satz: Rechenregeln für Vektoren

Es seien $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektoren und α und β seien reelle Zahlen, dann gilt:

1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
3. Es gibt einen *Nullvektor* $\vec{0}$ mit $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.
4. Zu $\vec{v}$ gibt es einen Vektor $-\vec{v}$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.
5. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$.
6. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.
7. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$.
8. $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$

Bemerkung zu 3.: ... nämlich $\vec{0} := (0, 0, \ldots, 0)^T$.

Bemerkung zu 4.: ... nämlich $-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} = (-v_1, \ldots, -v_n)^T$.

11.4 Definition: Linearkombination

Es seien $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ Elemente des Vektorraums V. Eine Summe der Form

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

heißt *Linearkombination* und die Zahlen $\alpha_j \in \mathbb{R}$ heißen *Koeffizienten* der Linearkombination.

Beispiele: Der Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten 6, 4 und 2,

und eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit Koeffizienten 4, 0 und 2.

11.5 Definition: Linear abhängig

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ des Vektorraums V heißen *linear abhängig*, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle Null sind, so dass aber die Linearkombination $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$ ist.

Sie heißen *linear unabhängig*, wenn sie nicht linear abhängig sind.

11.6 Bemerkung

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

(als Gleichung für die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$) nur die Lösung $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ hat.

11.7 Beispiele

1. Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, denn es gilt $4\vec{u} + (-1)\vec{v} + (-2)\vec{w} = 0$.
2. Die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig, denn $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$ ist gleichbedeutend mit dem LGS $\left\{ \begin{array}{rrl} \alpha + & 2\beta & = 0 \\ 2\alpha + & \beta & = 0 \end{array} \right\}$ und dies hat die eindeutige Lösung $\alpha = \beta = 0$ (vgl. das Kapitel über LGS).

11.8 Bemerkung

1. $\vec{v} \in V$ ist genau dann linear abhängig, wenn $\vec{v} = 0$.
2. Die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils
   a) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt, und
   b) je einer der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.
3. Die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils
   a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen in einer Ebene durch den Nullpunkt, und
   b) mindestens einer der Vektoren ist eine Linearkombination der anderen beiden.

11.9 Weitere wichtige Begriffe und Bemerkungen

1. Das *Erzeugnis* (oder *Spann*) der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren. (Das ist auch für eine beliebige Menge von Vektoren erklärt).
2. Lässt sich jedes Element von V eindeutig(!) als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in V$ darstellen, dann nennt man $\left\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\right\}$ eine *Basis* von V.
3. Die Elemente einer Basis sind linear unabhängig.

11.9 Weitere wichtige Begriffe und Bemerkungen[cont.]

Speziell für das Rechnen im $\mathbb{R}^n$ heißt das

4. n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie eine Basis bilden.
5. Die *Standardbasis* des $\mathbb{R}^n$ besteht aus den *kanonischen Einheitsvektoren*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 12 – Skalar- und Vektorprodukt

12.1 Definition: Skalarprodukt, Norm und Winkel

1. Das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n.$$

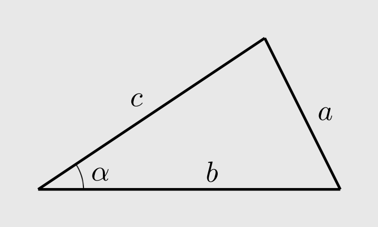
2. Die *Norm* (oder der *Betrag*) eines Vektors ist definiert durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

3. Der *Winkel* $\psi \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, beide nicht der Nullvektor, ist definiert durch

$$\cos \psi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}.$$

Das Winkel wird über das Skalarprodukt so definiert, dass er mit dem ebenen Winkel im $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Hilfsmittel ist der Kosinussatz:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

12.2 Satz: Eigenschaften des Skalarproduktes und der Norm

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. $\vec{v} \cdot \left(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\right) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u})$.
3. Für $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| = 1$.
4. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht aufeinander stehen.
5. Der Vektor $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
6. $\|\vec{v}\| \geq 0$.
7. $\|\vec{v}\| = 0$ genau dann, wenn $\vec{v} = \vec{0}$.
8. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$.

12.3 Satz: Dreiecksungleichung

Für Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

und

$$\big|\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|\big| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|,$$

sowie damit dann

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| + \|\vec{u} - \vec{w}\|.$$

12.4 Satz: Parallelogrammgleichung

Für Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2.$$

Im Fall des $\mathbb{R}^3$ gibt es noch ein Produkt zwischen Vektoren, dass als Ergebnis wieder einen Vektor liefert.

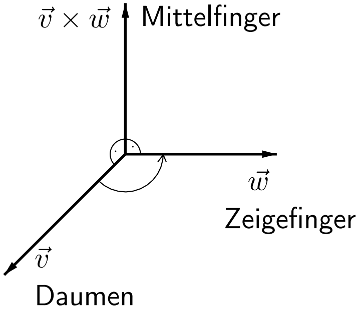
12.5 Definition: Kreuzprodukt

Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist das *Kreuzprodukt* (oder *Vektorprodukt*) $\vec{v} \times \vec{w}$ definiert durch

$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

12.6 Satz: Eigenschaften des Kreuzproduktes

1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $\vec{v} \times \left(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\right) = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{u})$.
3. Ist α der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ so ist $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin\alpha$.
4. $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.
5. $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = 0$. D.h. $\vec{v} \times \vec{w}$ steht sowohl senkrecht auf $\vec{v}$ als auch auf $\vec{w}$.
6. $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelogramms.
7. $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*.



Rechte-Hand-Regel

Eine Kombination des Skalarproduktes und des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^3$ liefert ein weiteres geometrisch relevantes Produkt:

12.7 Definition: Spatprodukt

Das *Spatprodukt* dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

ie folgenden Eigenschaften des Spatproduktes sind direkte Konsequenzen aus denen der beiden beteiligten Produkte:

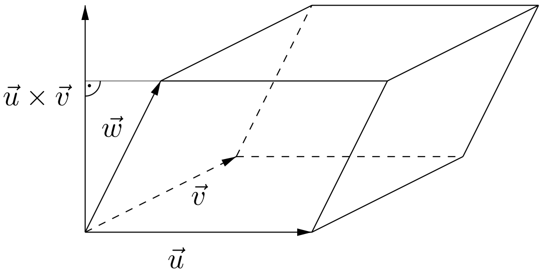
12.8 Folgerung: Eigenschaften des Spatproduktes

1. Das Spatprodukt ist *total schiefsymmetrisch*, d.h.

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathfrak{s}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \mathfrak{s}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) \\ &= -\mathfrak{s}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -\mathfrak{s}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})\end{aligned}$$

12.8 Definition: Spatprodukt[cont.]

2. Der Betrag des Spatproduktes $|\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$, entspricht dem Volumen des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds.



<u>Bemerkung:</u> Man kann das Spatprodukt der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der *Sarrus-Regel* berechnen.

$$\begin{array}{cccccc} & u_1 & v_1 & w_1 & u_1 & v_1 \\ & u_2 & v_2 & w_2 & u_2 & v_2 \\ & u_3 & v_3 & w_3 & u_3 & v_3 \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Es ist nämlich

$$\mathfrak{s}\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right) = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_3 v_2 w_1 - v_3 w_2 u_1 - w_3 u_2 v_1$$

Kapitel 13 – Geraden und Ebenen

13.1 Definition: Gerade und Ebene

Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren und $\vec{a}$ ein weiterer Vektor. Eine *Gerade* g ist eine Menge der Form

$$g = \{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Eine *Ebene* E ist eine Menge der Form

$$E = \{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w} \,|\, t, s \in \mathbb{R}\}$$

Dabei heißen $\vec{a}$ *Aufpunktvektor* und $\vec{v}$ bzw. $\vec{v}, \vec{w}$ *Richtungsvektoren* der Geraden bzw. Ebene. Diese Darstellungen nennt man *Parameterdarstellungen* der Geraden bzw. Ebene.

13.2 Bemerkung

Die Richtungsvektoren sind nicht eindeutig.

1. Im Fall der Gerade ist mit $\vec{v}$ auch jeder Vektor $\alpha\vec{v}$ für $\alpha \neq 0$ ein Richtungsvektor der gleichen Geraden.
2. Im Fall der Ebene lässt sich jeder der Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ durch eine Linearkombinaton $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ ersetzen, ohne die Ebene zu ändern (man muss nur die lineare Unabhängigkeit erhalten).

13.3 Definition: Parallelität

1. Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind.
2. Zwei Ebenen heißen *parallel*, wenn die Richtungsvektoren der einen Ebene jeweils als Linearkombination der Richtungsvektoren der anderen Ebene dargestellt werden können.

Geraden sind bereits durch die Angabe zweier unterschiedlicher Punkte eindeutig festgelegt, eine Ebene durch die Angabe dreier Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

13.4 Satz

Es seien zwei verschiedene Punkte $\vec{p}$ und $\vec{q}$ im Raum gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade, die $\vec{p}$ und $\vec{q}$ enthält. Diese ist gegeben durch

$$g = \{\vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Es sei $\vec{r}$ ein weiterer Punkt, der nicht auf der Geraden g durch $\vec{p}$ und $\vec{q}$ liegt. Dann gibt es genau eine Ebene, die die Punkte $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$ enthält. Diese ist gegeben durch

$$E = \{\vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) + s(\vec{r} - \vec{p}) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch Geraden im $\mathbb{R}^2$ und Ebenen im $\mathbb{R}^3$. Dafür gibt es eine weitere nützliche Darstellungsform.

13.5 Definition: Normalenvektoren

1. Ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ heißt *Normalenvektor* der Geraden g, wenn $\vec{n}$ auf den Richtungsvektoren der Geraden senkrecht steht.
2. Ein Vektor $\vec{n} \neq \vec{0}$ heißt *Normalenvektor* der Ebene E, wenn $\vec{n}$ auf allen Richtungsvektoren der Ebene senkrecht steht.

Gilt zusätzlich noch $\|\vec{n}\| = 1$, so nennt man $\vec{n}$ einen *Einheitsnormalenvektor*.

13.6 Satz

1. Die Einheitsnormalenvektoren von Geraden und Ebenen sind bis auf das Vorzeichen eindeutig.
2. Zwei Geraden bzw. Ebenen sind genau dann parallel, wenn die Einheitsnormalenvektoren (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmen.
3. Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Richtungsvektoren einer Ebene, so ist $\vec{n} := \frac{1}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|} (\vec{v} \times \vec{w})$ ein Einheitsnormalenvektor der Ebene.

13.7 Satz: Hessesche Normalenform der Geraden

1. Sei g eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ und $\vec{a}$ ein beliebiger Aufpunktvektor. Dann lässt sich g in der Form

$$g = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0\} = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}\},$$

darstellen, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Geraden ist.

2. Ist $\vec{n}$ ein Einheitsnormalenvektor, so ist $d_0 := \vec{n} \cdot \vec{a}$ unabhängig von der Wahl des Aufpunktes.

3. Wählt man $\vec{n}$ so, dass $d_0 \geq 0$, so nennt man die Darstellung

$$E = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = d_0\}$$

Hessesche Normalenform (HNF) der Geraden.

4. Ist $d_0 > 0$, so ist die HNF eindeutig.

Völlig analog erhält man

13.8 Satz: Hessesche Normalenform der Ebene

1. Sei E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ und $\vec{a}$ ein beliebiger Aufpunktvektor. Dann lässt sich E in der Form

$$E = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0\} = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}\},$$

darstellen, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene ist.

2. Ist $\vec{n}$ ein Einheitsnormalenvektor der Ebene, so ist $d_0 := \vec{n} \cdot \vec{a}$ unabhängig von der Wahl des Aufpunktes.

3. Wählt man $\vec{n}$ so, dass $d_0 \geq 0$, so nennt man die Darstellung

$$E = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = d_0\}$$

Hessesche Normalenform (HNF) der Ebene.

4. Ist $d_0 > 0$, so ist die HNF eindeutig.

Mit Hilfe der HNF kann man leicht den Abstand eines Punktes von einer Geraden oder Ebene bestimmen.

13.9 Satz: Abstand Punkt↔Gerade und Punkt↔Ebene

Es sei $\{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = d_0\}$ die HNF der Geraden (Ebene) g (E) und $\vec{a}$ ein beliebiger Aufpunktvektor. Ferner sei P ein Punkt im Raum und $\vec{p}$ sein Ortsvektor.
Dann misst $d(P) := |\vec{n} \cdot (\vec{a} - \vec{p})|$ den Abstand des Punktes P von der Geraden (Ebene) g (E).
Insbesondere gilt für den Nullpunkt $d(\vec{0}) = d_0$.