Übungen zu "Binomialkoeffizienten und Vollständige Induktion"

Aufgabe 1:
(Binomialkoeffizienten)

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Definition

i) $\binom{9}{4}$ ii) $\binom{9}{5}$ iii) $\binom{20}{2}$

b) Beweisen Sie für $k, n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$, die folgenden Gleichungen

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ii) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$

c) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

i) $\binom{15}{12}$ ii) $\binom{17}{12}$ iii) $\binom{99}{98}$

d) * Bestimmen Sie $m, n \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt

i) $\binom{m}{2} = 861$ ii) $\binom{n+2}{n} = 66$

Tipp: $\sqrt{529} = 23$ und $\sqrt{6889} = 83$.

Aufgabe 2:
(binomischer Lehrsatz)

a) Multiplizieren Sie aus

i) $(x-y)^5$ ii) $\left(a + \frac{1}{2}\right)^4$

b) Berechnen Sie

i) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ ii) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

c) * Berechnen Sie

i) $\sum_{k=0}^{n} 2^n \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ ii) $\sum_{k=0}^{3n} \left(7 - (-2)^k\right) \binom{3n}{k}$ iii) $\dfrac{8 \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{n-k}}{\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}}$

Aufgabe 3:
(vollständige Induktion)

Zeigen Sie

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

(Zusatzfrage: Wer erkennt die rechte Seite wieder?)

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

c) $n^3 - n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

d) * Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n \geq n^2$? Beweisen Sie Ihre Behauptung.