Übungen zu "Differenzierbarkeit"

Aufgabe 1:

(i) Bestimmen Sie die Steigung des Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit } f(x) = 3x^2 - 2x$$

in $x_0 = \frac{1}{2}$ (also im Punkt $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$), und geben Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen in $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ an.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

(1) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph von f in $(x_0, f(x_0))$ die Steigung -1 hat.

(2) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade $y = -x$ die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ ist.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Ableitung von $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}$ oder von $x^2\sqrt{x^3}$, indem Sie

(i) direkt die Differentiationsregeln anwenden,

(ii) erst mit Hilfe der Potenzregeln vereinfachen, und dann die erforderliche Differentiationsregel benutzen.

Aufgabe 3:

Vereinfachen Sie (falls möglich) folgende Funktionsausdrücke zuerst mit Hilfe der Potenzregeln, und berechnen Sie dann die Ableitung:

$$\text{(i) } \sqrt[3]{x^2} \qquad \text{(ii) } \sqrt[3]{x^2+1} \qquad \text{(iii) } \sqrt[3]{(x+1)^2} \qquad \text{(iv) } \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}$$

$$\text{(v) } \frac{1}{x+1} \qquad \text{(vi) } \frac{1}{(x+1)^2} \qquad \text{(vii) } \frac{1}{\sqrt{1+x}} \qquad \text{(viii) } \sqrt[5]{3x(x-1)^7}$$

Aufgabe 4:

Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

$$\text{(i) } x\sqrt{x+1} \qquad \text{(ii) } \frac{x}{x-1} \qquad \text{(iii) } \tan x - \cot x \qquad \text{(iv) } \frac{x}{\sqrt{4-x}}$$

$$\text{(v) } \arcsin x \arccos x \qquad \text{(vi) } \sin[\sin(\sin x)] \qquad \text{(vii) } x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{(viii) } \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\,\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} \text{ (Achtung! etwas schwierig)} \qquad \text{(ix) } \arctan\frac{1+x}{1-x}$$

Vereinfachen Sie die Ableitungen, wenn es möglich ist.

Aufgabe 5:

Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ g$ einmal, indem Sie zunächst aufmultiplizieren, und einmal mit der Kettenregel:

$f(x) = x^2$, $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$