Übungen zu "Geraden und Ebenen"

Aufgabe 1:

(i) Geben Sie die Parameterdarstellung an

a) der Geraden durch die Punkte $P = (1, 2)^T, Q = (-2, 5)^T$

b) der Geraden mit der Gleichung $y = -x + 3$

c) der Strecke von $A = (-1, 2)^T$ nach $B = (3, 1)^T$

(ii) Geben Sie die Normalenform der Geraden mit der Parameterdarstellung
$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

(iii) Welche der Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 4,5 \\ -9 \end{pmatrix} \quad , \quad g_2 : x = \begin{pmatrix} 4 \\ 6,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g_3 : x = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad g_4 : x = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

sind parallel?

(iv) Liegen die drei Punkte $A = (2, 2, 3)^T, B = (-2, 3, 1)^T, C = (-6, 4, 1)^T$ auf einer Geraden? Diskutieren Sie verschiedene Möglichkeiten, dies zu prüfen.

(v) Beweisen Sie vektoriell, dass die Schwerlinien (Seitenhalbierenden) eines Dreiecks durch einen Punkt gehen. Berechnen Sie diesen Schwerpunkt für das Dreieck mit den Ecken $(-1, -1)^T$, $(3, 0)^T, (-2, 4)^T$.

(vi) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung der Mittelsenkrechten auf der Strecke mit den Endpunkten $A = (2, 1)^T, B = (-1, 3)^T$.

Aufgabe 2:

(i) Liegen die vier Punkte

$$A = (0, 2, 2)^T \ , \ B = (2, 0, -1)^T \ , \ C = (3, 4, 0)^T \ , \ D = (0, -1, 1)^T$$

in einer Ebene?

(ii) Geben Sie die Normalenform der Gleichung der Ebene in vektorieller Schreibweise an, wenn die Ebene die Gleichung $2x - y + 2z = 12$ hat.

(iii) Durch folgende Gleichungen sind vier Ebenen gegeben:

$$e_1 : x + 2y - 2z = 5 \ , \ e_2 : 3x - 6y + 3z = 2 \ , \ e_3\, 2x + y + 2z = -1 \ , \ e_3 : x - 2y + z = 7$$

Stellen Sie fest, welche der Ebenen parallel bzw. senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 3:

(i) Welche Punktmenge beschreibt die Gleichung $x + y = 3$

a) in der Ebene,

b) im Raum?

(ii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

und der Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

indem Sie die Ebene zunächst in Normalenform bringen.

Aufgabe 4:

Haben die Geraden mit den Parameterdarstellungen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

einen Schnittpunkt?