

# Übungen zu "Lineare Gleichungssysteme"

## Aufgabe 1:

a) Welche Umformungen zum Lösen eines **linearen Gleichungssystems** (LGS) sind erlaubt?

b) Betrachten Sie das folgende LGS

$$\begin{aligned}2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 5 \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -3 \\4x_1 + 9x_2 + 13x_3 &= -9\end{aligned}$$

i) Bringen Sie das LGS auf Zeilenstufenform.

ii) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS.

(i)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\-2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\-4x_1 + x_2 + 14x_3 &= 4\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\-2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \\-4x_1 + x_2 + 14x_3 &= 0\end{aligned}$$

## Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden LGS:

i)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\4x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\2x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 1\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 - x_3 &= 17 \\-2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -7 \\3x_1 - x_2 - 5x_3 &= 37\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -2 \\4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 9 \\-x_1 + 3x_2 &= 6 \\x_1 + 7x_2 &= 24 \\7x_1 - 6x_2 &= 3 \\6x_1 + 2x_2 &= 24 \\7x_1 + 19x_2 &= 78\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\-x_1 + 12x_2 - 7x_3 &= 8\end{aligned}$$

### Aufgabe 3:

- a) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge und geben Sie zusätzlich die Lösung(en) mit  $x_1 = 1$  an.

$$\begin{array}{l} \text{i)} \quad -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -7 \\ \quad \quad x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ \quad \quad -2x_1 + 7x_2 + x_3 = -14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ii)} \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -5 \\ \quad \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -9 \\ \quad \quad -8x_1 + 12x_2 - 12x_3 = 4 \end{array}$$

$$\text{iii)} \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

$$\begin{array}{l} \text{iv)} \quad 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5 \\ \quad \quad -6x_1 - 4x_3 - 3x_4 = -11 \\ \quad \quad \quad x_1 - x_2 + \frac{2}{3}x_3 + x_4 = \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{v)} \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \quad 2x_1 - 7x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{vi)} \quad x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ \quad \quad 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ \quad \quad 2x_1 - 7x_2 - x_3 - 5x_4 = 6 \end{array}$$

- b) Bei den folgenden Gleichungssystemen ist jeweils ein Wert verloren gegangen und wurde durch  $a$  ersetzt. Bekannt ist, dass die LGS lösbar waren. Finden Sie jeweils alle möglichen Werte für  $a$ .

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \left( \begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2a & 2 \end{array} \right) & \text{ii)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & 4 & a \end{array} \right) & \text{iii)} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} a & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

### Aufgabe 4

- a) Von einem quadratischen Polynom  $p(x)$  seien bekannt:

$$\begin{array}{l} p(1) = 5 \\ p(3) = 19 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p(-1) = 7 \\ p(-2) = 14 \end{array}$$

Wie lautet das Polynom?

- b) Von einem quadratischen Polynom  $p(x)$  seien bekannt:

$$\begin{array}{l} p(-2) = p(-1) \\ p(1) = p(2) - 6 \end{array}$$

$$p(0) = p(-3)$$

Wie lautet  $p(x)$ ?