

Übungen zu "Mengen"

Aufgabe 1:

Geben Sie folgende Mengen durch Aufzählen ihrer Elemente an:

$$A = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid 0 < x < 4, 8\}$$

$$B = \{t \in \mathbb{N}_0 \mid t \text{ ist Teiler von } 24\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist positiv, durch } 3 \text{ teilbar und kleiner als } 21\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 = 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid (x - 1)^2 = 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 8 = 9\}$$

Aufgabe 2:

Schreiben Sie als Aufzählung

$$(i) \{k \mid 2- \leq k \leq 4, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$(ii) \{(2k + 1)^2 \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

$$(iii) n \mid n^2 < 5, n \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe 3:

Schreiben Sie mit Hilfe einer definierenden Eigenschaft

$$(i) \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$(ii) \{5, 10, 15, 20, \dots\}$$

$$(iii) \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$(iv) \{1, 4, 9, 16, 25\}$$

$$(v) \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$$

Aufgabe 4:

Gegeben sind die vier Mengen

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{\{1\}, \{2\}\}, \quad C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}, \quad D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

Diskutieren Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$(i) A = B, \quad (ii) A \subseteq B, \quad (iii) A \subset C, \quad (iv) A \in C, \quad (v) A \subset D$$

$$(vi) B \subset C, \quad (vii) B \subset D, \quad (viii) B \in D, \quad (ix) A \in D$$

Aufgabe 5:

Prüfen Sie, ob folgende Mengenformeln gültig sind (Benutzen Sie Mengendiagramme zur Veranschaulichung)

$$(i) (A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$$

$$(ii) (A \cup B) \cap C \subseteq A \cap (B \cup C)$$

$$(iii) (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$$

Aufgabe 6:

Beweisen Sie folgende Mengenformeln:

$$(i) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(ii) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Aufgabe 7:

Sei $C \subset A$ und $C \subset B$.

(i) Ist dann $C \subset A \cap B$?

(ii) Ist dann $C \subset A \cup B$?

(iii) Ist $C = A \cap B$ möglich?

(iv) Ist das immer der Fall?

Aufgabe 8*:

Beweisen Sie, dass die eine der folgenden Mengenformeln immer richtig, die andere manchmal falsch ist:

$$(i) \quad A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$$

$$(ii) \quad A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$$

Aufgabe 9*:

Richtig oder falsch?

$$(i) \quad (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$(ii) \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

Aufgabe 10*:

Veranschaulichen Sie die Mengen jeweils an einer Skizze

$$(i) \quad (A \cup B) \times N = (A \times N) \cup (B \times N)$$

$$(ii) \quad (A \cup B) \times (M \cup N)$$

$$(iii) \quad (A \cap B) \times (M \cap N)$$