Übungen zu "Ordnung und Betrag"

Aufgabe 1:
Beispiele für Ungleichungen, bei deren Lösung naheliegende Umformungen nicht immer äquivalente Umformungen sind:

(i) $\dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6} = 0$

(ii) $x - 1 = \sqrt{2x + 1}$

Diskutieren Sie die möglichen Vorgehensweisen, wenn bei einer wünschenswerten Umformung keine Äquivalenz, sondern nur die Implikation „$\Rightarrow$ “ in der Schreibrichtung gilt; z.B.: Welche Beziehung besteht dann zwischen der Zahlenmenge, die man schließlich erhält, und der Lösungsmenge der Gleichung? Was bedeutet es im Grunde, wenn man von einer erforderlichen „Probe“ spricht? Lässt sich u.U. zeigen, dass eine Umformung doch eine äquivalente Umformung ist, wenn man sich auf die Betrachtung des Definitionsbereiches der Gleichung beschränkt?

(iii) Dass die vorhergehende Bestimmung des Definitionsbereiches nützlich sein kann, zeigt die Untersuchung der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0\ .$$

Aufgabe 2:
Lösen Sie folgende Ungleichungen, indem Sie Äquivalenzen wie „$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = 0$ “, oder „$a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \ldots$ “, oder „$a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \ldots$ “ usw. ausnutzen:

(i) $(x-1)(x-3) > 0$

(ii) $\dfrac{x-1}{x-3} > 0$

(iii) $x^3 + 5x^2 \geq 0$

(iv) $x^2 - 4x < 0$

(v) $\dfrac{2x}{3x+4} \geq 0$

Aufgabe 3*:
Lösen Sie folgende Ungleichungen durch Fallunterscheidung oder durch Umformung in Ungleichungen:

(i) $\dfrac{2x-5}{x-4} > 1$

(ii) $\dfrac{3}{x-5} < \dfrac{2}{x+3}$

(iii) $\dfrac{x+3}{x} \geq \dfrac{x}{x+3}$

Aufgabe 4:
Formen Sie in betragsfreie Ausdrücke um, indem Sie Fallunterscheidungen verwenden

(i) $|x^2 - 2xy + y^2|$

(ii) $a - |a - |a||$

(iii) $\dfrac{a + b + |a - b|}{2}$

Aufgabe 5:
Deuten Sie die auftretenden Beträge geometrisch als Abstände von Punkten auf der Zahlengeraden, und bestimmen Sie so die Lösung der Gleichung bzw. Ungleichung:

(i) $|x - 3| = 8$; $|x + 3| = 8$; $|x| \leq 5$; $|x - 3| < 8$; $|x + 3| > 8$; $x^2 > 9 \quad (\Leftrightarrow |x| > 3)$

(ii) $|x + 1| = |x - 1|$; $|x - 1| + |x - 2| > 1$; $|x - 1| + |x - 2| = 1$; $|x - 1| + |x + 1| < 2$

(iii) Formen Sie zuerst so um, dass der Koeffizient bei x gleich 1 ist und Sie einen Ausdruck der Form $|x - a|$ erhalten: $|3 - 5x| = 2$; $|4 - 2x| < 3$; $5 - 2|x - 3| \leq 6$.

Aufgabe 6:
Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Ungleichungen

(i) $|x| - |x - 4| + |x - 6| < 5$

(ii) $x^2 + 4x + 3 < |x^2 + 4x + 3|$

(iii) $\dfrac{|x^3 - 125|}{1 + |x^3 + 111|} > 0$

Aufgabe 7:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $\dfrac{1}{x + 1} - x \leq -\dfrac{1}{2}$.