Übungen zu "Vektoren"

Aufgabe 1:
Drücken Sie für ein Parallelogramm $ABCD$ mit $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ die Vektoren $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BD}$ mit Hilfe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie: Verbindet man die Mittelpunkte der benachbarten Seiten eines beliebigen Vierecks in der Ebene miteinander, so erhält man ein Parallelogramm.

Aufgabe 3:

a) Es seien V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_k \in V$. Was ist $\mathrm{Span}(v_1, ..., v_k)$?

b) Skizzieren Sie

i) $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ii) $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

iii) $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}\right)$ iv) $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$

Was unterscheidet iii) und iv)?

c) Basen sind besondere Erzeugendensysteme. Welche Eigenschaften haben diese zusätzlich?

Aufgabe 4:

a) Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig? Wenn nein, wählen Sie maximal viele linear unabhängige Vektoren aus.

i) $v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

ii) $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}7\\-6\end{pmatrix}$

iii) $v_1 = \begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

iv) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\2\\-1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\7\\8\\2\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}-7\\-4\\-2\\-5\end{pmatrix}$

b) Liegt der Vektor b jeweils im Spann von $v_1, ..., v_k$? Wenn ja, geben Sie eine Darstellung der Form

$$b = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j$$

an. Ist die Darstellung eindeutig?

i) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ \pi \end{pmatrix}$

ii) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

iv) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

v) $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$