Inhaltsverzeichnis

5 Affine Geometrie

5.1 Affine Räume, Unterräume und Basen

[1] Ein affiner Raum besteht aus zwei Mengen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$ zusammen mit einer Relation der „Inzidenz“ zwischen ihnen. Die Elemente von $\mathcal{P}$ heißen „Punkte“, die von $\mathcal{G}$ heißen „Geraden“. Dabei kann eine Gerade als Punktmenge aufgefasst werden, dann wird die Inzidenz durch „$a \in g$”, für $a \in \mathcal{P}$, $g \in \mathcal{G}$ beschrieben. Für $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ gelten gewisse Axiome, die wir hier nicht behandeln. Stattdessen legen wir unserer weiteren Darstellung direkt den im Folgenden definierten affinen Raum eines K-Vektorraumes zugrunde.

Definition 5.1.1 Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Der *affine Raum* $\mathrm{AG}(V) = \mathrm{AG}(V, K) = (\mathcal{P}, \mathcal{G})$ von V besteht aus $\mathcal{P} = V$ als Punktmenge und

$$\mathcal{G} := \{a + Kv \mid a, v \in V,\ v \neq \mathbf{0}\}$$

als Menge der Geraden.

Die Geraden von $\mathrm{AG}(V)$ sind also definitionsgemäß alle affinen Geraden (eindimensionalen affinen Unterräume) des Vektorraumes V.

In jedem affinen Raum (nicht nur in $\mathrm{AG}(V)$) macht folgende Definition Sinn:

Definition 5.1.2 a) Für $a, b \in \mathcal{P} = V$, $a \neq b$ sei $\overline{ab} \in \mathcal{G}$ die eindeutige Gerade, die a und b enthält.

b) Für $a \in \mathcal{P} = V$ und $g \in \mathcal{G}$ sei $g_a \in \mathcal{G}$ die eindeutige Parallele zu g durch den Punkt a. (Also $g_a = a + Kv$, wenn $g = a_0 + Kv$.)

Aufbauend auf die in der letzten Definition 5.1.2 betrachteten Grundkonstruktionen „Gerade durch zwei Punkte” und „Parallele” kann man nun den Begriff des Teilraumes rein geometrisch definieren:

Definition 5.1.3 Ein *Teilraum* eines affinen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ ist eine Teilmenge $T \subseteq \mathcal{P}$, die folgenden Bedingungen genügt:

(AT1) Für $a, b \in T$ ist $\overline{ab} \subseteq T$.

(AT2) Für $a \in T$ und $g \in \mathcal{G}$ so, dass $g \subseteq T$, ist $g_a \subseteq T$.

Früher haben wir bereits einen affinen Unterraum eines Vektorraumes V eingeführt als eine Teilmenge der Form $a_0 + U$, wobei U ein Untervektorraum von V ist. Wenn $a, b \in a_0 + U$ sind, dann ist der Richtungsvektor $b - a$ der Geraden $\overline{ab}$ ein Element von U, woraus sofort folgt, dass jeder affine Unterraum von V auch ein Teilraum von $\mathrm{AG}(V, K)$ im Sinne der Definition 5.1.3 ist. Wir kommen unter 5.1.7 darauf zurück. Insbesondere ist jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ ein Teilraum. Trivialerweise ist auch jede einpunktige Menge eine Teilraum, ebenso die leere Menge.

[1] Der in diesem Absschnitt gewählte Aufbau der Grundbegriffe affiner Räume ist stark von den Vorlesungen meines Kollegen Franz Kalhoff beeinflusst.

Satz 5.1.4 *Wenn $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilräumen eines affinen Raumes ist, dann ist auch ihr Durchschnitt $\cap_{T\in\mathcal{T}}T$ ein Teilraum.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen. Die Aussage wird als eigenständiger Satz geführt, weil sie die folgende Definition ermöglicht.

Definition 5.1.5 Es sei $(\mathcal{P},\mathcal{G})$ ein affiner Raum und $A \subseteq \mathcal{P}$ eine Teilmenge seiner Punktmenge. Der Teilraum

$$\operatorname{Aff} A := \bigcap_{\substack{T \text{ Teilraum} \\ A\subseteq T}} T$$

heißt der *von A erzeugte* Teilraum oder die *affine Hülle* von A . Wenn $\operatorname{Aff} A = \mathcal{P}$ ist, dann heißt A ein *affines Erzeugendensystem* von $\mathcal{P}$ oder von $(\mathcal{P},\mathcal{G})$.

Diese Art der Definition eines „Erzeugnisses" oder einer „Hülle" ist immer möglich, wenn ein Mengensystem $\mathcal{M}$ (eine Menge von Teilmengen einer festen Menge) gegeben ist, das unter Durchschnitten abgeschlossen ist. In Definition 5.1.5 bestand $\mathcal{M}$ aus allen Teilräumen eines affinen Raumes, genauso gut könnte man alle Untervektorräume eines Vektorraumes nehmen. Mittels der eben eingeführten Hüllenbildung würde man dann den von einer Menge A erzeugten Untervektorraum bekommen. Dieser stimmt natürlich mit der früher definierten linearen Hülle $\operatorname{Lin} A$ überein. Die bekannte Definition von $\operatorname{Lin} A$ über Linearkombinationen ist konkreter und damit auch anschaulich zugänglich, die jetzige Definition des Erzeugnisses hat den Vorteil großer Allgemeingültigkeit. Ein anderes Beispiel für die Anwendbarkeit der obigen Durchschnitts-Konstruktion sind konvexe Teilmengen in reellen Vektorräumen oder auch Untergruppen einer beliebigen, eventuell nicht kommutativen Gruppe.

Folgendes ist klar, sollte aber einmal explizit festgehalten werden:

Bemerkung 5.1.6 Für zwei beliebige verschiedene Punkte a, b eines affinen Raumes gilt $\overline{ab} = \operatorname{Aff}\{a, b\}$.

Vor den weiteren Untersuchungen klären wir zunächst abschließend, wie Teilräume eines affinen Raumes auf Untervektorräume des zugehörigen Vektorraumes zurückgeführt werden können.

Satz und Definition 5.1.7 *Wir betrachten den affinen Raum $\operatorname{AG}(V,K)$ eines Vektorraumes V.*

a) Wenn T ein nicht-leerer affiner Teilraum von V ist, dann ist $U_T := \{b-a \mid a, b \in T\}$ ein Untervektorraum von V. Er heißt auch die Richtung *oder der* Richtungsraum *von T.*

b) Jedem affinen Teilraum T kann man eine durch $\dim T := \dim U_T$ definierte Dimension *zuordnen. Man setzt dabei $\dim\emptyset = -1$.*

c) *Eine nicht-leere Teilmenge T von V ist genau dann ein Teilraum, wenn T ein affiner Unterraum (im Sinne der linearen Algebra) des Vektorraumes V ist, also von der Form $T = a + U$, wobei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum ist. In diesem Fall ist $U_T = U$.*

Beweis: Für a) muss man aus den geometrischen Bedingungen der Definition 5.1.3 herleiten, dass U_T unter der Bildung von Summen und skalaren Vielfachen abgeschlossen ist. (Details mit Zeichung in der Vorlesung.) c) betreffend hatten wir oben bereits festgehalten, dass $a+U$ die Teilraumaxiome aus Definition 5.1.3 erfüllt. Die umgekehrte Implikation folgt aus a): man nimmt $U := U_T$, dann ist nach a) $T = a + U_T$ für beliebiges, fest gewähltes $a \in U$. □

Genau wie bei Untervektorräumen ist die Vereinigung von zwei Teilräumen eines affinen Raumes in aller Regel kein Teilraum (weil die meisten Verbindungsgeraden fehlen). Die Reparatur dieses Defizites findet sich in der folgenden Definition:

Definition 5.1.8 Für zwei Teilräume $T_1, T_2 \subseteq \mathcal{P}$ eines affinen Raumes heißt $T_1 \vee T_2 := \mathrm{Aff}(T_1 \cup T_2)$ der *Verbindungsraum* von T_1 und T_2.

Der Verbindungsraum von T_1 und T_2 ist also der kleinste affine Teilraum, der T_1 und T_2 enthält, völlig analog zur Summe von zwei Untervektorräumen. Der Verbindungsraum von zwei einpunktigen Mengen $\{a\}$ und $\{b\}$ ist genau die von a und b erzeugte Gerade:

$$\{a\} \vee \{b\} = \mathrm{Aff}\{a, b\} = \overline{ab}.$$

Die Abbildung $A \mapsto \mathrm{Aff}\, A$ ist eine Operation auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(V)$ von V. In der folgenden Bemerkung halten wir ihre wesentlichen formalen Eigenschaften fest:

Bemerkung 5.1.9

a) Die Zuordnung $A \mapsto \mathrm{Aff}\, A$ ist ein sogenannter *Hüllenoperator* auf $\mathcal{P}(V)$, das heißt, für alle $A, B \subseteq V$ gilt:

$(H1)$ $A \subseteq \mathrm{Aff}\, A$,
$(H2)$ $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Aff}\, A \subseteq \mathrm{Aff}\, B$,
$(H3)$ $\mathrm{Aff}\, A = \mathrm{Aff}(\mathrm{Aff}\, A)$.

b) $A \subseteq \mathcal{P}$ ist ein Teilraum genau dann, wenn $A = \mathrm{Aff}\, A$ ist.

Andere bekannte Hüllenoperatoren sind die Bildung der linearen Hülle $\mathrm{Lin}\, A$ in einem Vektorraum, der konvexen Hülle in einem reellen Vektorraum, der von einer Teilmenge $A \subseteq G$ einer Gruppe G erzeugten Untergruppe $\langle A \rangle$, oder des Abschlusses (der abgeschlossenen Hülle) einer beliebigen Teilmenge eines topologischen Raumes.

Wir kommen nun zur „affinen Unabhängigkeit“ von Punkten eines affinen Raumes, die der linearen Unabhängigkeit von Elementen eines Vektorraumes entspricht. Wir hatten die lineare Unabhängigkeit über die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Linearkombination eingeführt. Es zeigte sich dann, dass der Begriff vollständig auf den Begriff der linearen Hülle zurückgeführt werden kann: ein System oder eine Menge von Vektoren ist linear unabhängig genau dann, wenn keiner von ihnen in der linearen Hülle der übrigen liegt. Im affinen Raum benutzen wir dieses Kriterium als Definition.

Definition 5.1.10 Ein System $a_0, a_1, \ldots, a_k$ von Punkten eines affinen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt *affin unabhängig*, falls für jedes $i = 0, 1, \ldots, k$ gilt

$$a_i \notin \operatorname{Aff}\{a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k\}\,.$$

Entsprechend heißt eine (ggf. unendliche) Teilmenge A affin unabhängig, wenn

$$a \notin \operatorname{Aff} A \setminus \{a\} \text{ für jedes } a \in A\,.$$

Ein affin unabhängiges Erzeugendensystem heißt auch *affine Basis* von $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$.

Bevor wir den Begriff der affinen Basis weiter untersuchen, geben wir eine konstruktive Beschreibung der affinen Hülle einer Punktmenge. Für Untervektorräume geschieht dieses bekanntlich mit Hilfe von Linearkombinationen. Für affine Teilräume müssen wir diesen Begriff etwas modifizieren. Gegeben seien $m+1$ Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_m \in V$. Ein Ausdruck

$$\beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_m a_m \text{ mit } \beta_i \in K,\ \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_m = 1$$

heißt *affine Linearkombination* oder kurz *Affinkombination* der a_i.

Satz 5.1.11 *a) Eine Teilmenge T von $\operatorname{AG}(V, K)$ ist genau dann ein Teilraum, wenn sie abgeschlossen ist unter Bildung von beliebigen Affinkombinationen: Wenn $a_0, a_1, \ldots, a_m \in T$ sind, dann liegt auch jede Affinkombination der a_i in T.*

b) Es sei A eine Menge von Punkten eines affinen Raumes $\operatorname{AG}(V, K)$. Die affine Hülle von A ist die Menge aller Affinkombinationen, die aus Elementen von A gebildet werden können:

$$\operatorname{Aff} A = \left\{ \sum_{i=0}^{m} \beta_i a_i \mid m \in \mathbb{N},\ a_0, \ldots, a_m \in A,\ \beta_i \in K,\ \sum_{i=0}^{m} \beta_i = 1 \right\}.$$

Ferner gilt

$$\operatorname{Aff} A = a_0 + \operatorname{Lin}\{a - a_0 \mid a \in A\},$$

wobei $a_0 \in A$ fest gewählt ist.

Der Richtungsraum von Aff A wird also von den Differenzvektoren $a - a_0,\ a \in A$ erzeugt.

Mit dem letzten Satz ist es kein Problem mehr, die affine Unabhängigkeit (von Punkten) auf die lineare Unabhängigkeit (von Vektoren) zurückzuführen.

Satz 5.1.12 *Für ein System $a_0, \ldots, a_k$ von $k+1$ Punkten eines affinen Raumes* $\mathrm{AG}(V, K)$ *sind äquivalent:*

(i) Die Punkte $a_0, \ldots, a_k$ sind affin unabhängig.

(ii) Die k Vektoren $a_1 - a_0, \ldots, a_k - a_0$ sind linear unabhängig.

(iii) Die Dimension des von $a_0, \ldots, a_k$ erzeugten Teilraumes ist k.

Folgerung 5.1.13 Jede affine Basis eines endlich-dimensionalen affinen Raumes $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ hat $n+1$ Elemente, wobei n die Dimension des Raumes ist.

Im Vektorraum dient eine Basis dazu, Koordinaten einzuführen, also einem Vektor eindeutig ein Tupel von Skalaren zuzuordnen, das umgekehrt diesen Vektor bestimmt. Im affinen Raum ist es analog:

Satz und Definition 5.1.14 *Es sei $a_0, \ldots, a_n$ eine (affine) Basis des affinen Raumes* $\mathrm{AG}(V, K)$. *Dann gibt es zu jedem Punkt $p \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$, für die gilt*

$$p = \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_n a_n \text{ und } \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_n = 1\,.$$

Die β_i heißen die baryzentrischen Koordinaten *von p bezüglich der gegebenen Basis.*

Die Existenz dieser Skalare ist bereits aus Satz 5.1.11 bekannt. Es geht nur noch um die Eindeutigkeit. Diese schließt man leicht aus Satz 5.1.12 (ii).

Der Gebrauch des Begriffs „baryzentrisch" in Satz 5.1.14 erklärt sich z.B. daraus, dass die affine Linearkombination $\frac{1}{3}(a+b+c)$ von drei Punkten, die nicht auf einer Geraden liegen, den Schwerpunkt (das Baryzentrum) des Dreiecks mit den Eckpunkten a, b, c liefert.

Baryzentrische Koordinaten sind schon in Dimension 1, also auf einer Geraden von Interesse:

Definition 5.1.15 Gegeben seien zwei verschiedene Punkte a_0, a_1 eines affinen Raumes, sowie ein weiterer Punkt $x \in \overline{a_0 a_1}$. Schreibe $x = \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1,\ \beta_0 + \beta_1 = 1$. Die Zahl β_1 heißt dann das *Teilverhältnis* von a_0, a_1 bezüglich x, Bezeichnung

$$\mathrm{TV}(a_0, a_1; x).$$

Das Teilverhältnis $\mathrm{TV}(a_0, a_1; x)$ ist also die (zweite) baryzentrische Koordinate von x bezüglich der Basis a_0, a_1 der Geraden $\overline{a_0a_1}$. Man beachte, dass die Definition des Teilverhältnisses von keiner Abstandsmessung Gebrauch macht, aber im euklidischen Vektorraum so interpretiert werden kann: in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum mit euklidischer Metrik d ist

$$\mathrm{TV}(a_0, a_1; x) = \frac{d(a_0, x)}{d(a_0, a_1)}.$$

Wir besprechen noch eine Variante des Basisbegriffs für affine Räume, die die Beziehung zu Vektorräumen stärker betont.

Definition und Bemerkung 5.1.16

a) Eine *Basis 2. Art* eines affinen Raumes ist ein System $(a_0; b_1, \ldots, b_n)$, wobei a_0 ein Punkt und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis des Vektorraums V ist.

b) Wenn $(a_0; b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis 2. Art ist, dann ist das System von Punkten $(a_0, a_0 + b_1, \ldots, a_0 + b_n)$ eine affine Basis. Wenn umgekehrt $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ eine affine Basis ist, dann ist $(a_0; a_0 - a_1, \ldots, a_0 - a_n)$ eine Basis 2. Art.

c) Wenn $(a_0; b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis 2. Art ist, dann kann jeder Punkt a eindeutig geschrieben werden als

$$a = a_0 + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n \text{ mit } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K\,.$$

Diese α_i heißen die *affinen Koordinaten* von a bezüglich der Basis.

d) In der Situation von c) sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ auch die baryzentrischen Koordinaten von a bezüglich der Basis 1. Art $(a_0, a_0 + b_1, \ldots, a_0 + b_n)$ gemäß b), wobei $\alpha_0 := 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Eine affine Basis wird in diesem Zusammenhang auch *Basis 1. Art* genannt.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Ergänzung zur Kennzeichnung von affinen Teilräumen. In der allgemeinen Theorie sogenannter „Inzidenzräume", die durch eine Axiomatik für „Punkte" und „Geraden" gegeben werden, ist es natürlich, von einem Teilraum nur das obige Axiom (AT1) zu verlangen. Das die Parallelen betreffende Axiom (AT2) ist ein in gewisser Weise unnatürlicher, spezieller Zusatz im affinen Fall. Deswegen ist es gut zu wissen, dass die Bedingung (AT2) entbehrlich ist, nämlich aus (AT1) folgt, sobald der Grundkörper K mehr als zwei Elemente hat. Entsprechend braucht man dann in Satz 5.1.11 a) nur noch Affinkombinationen von zwei Punkten zu betrachten: Wenn $a, b \in T,\ \beta \in K$ impliziert, dass $(1 - \beta)a + \beta b \in T$ ist, dann ist T ein Teilraum.

Anhang: eine kurze „algebraische” Axiomatik für affine Räume.

Wir haben in diesem Abschnitt zwar einige Bemerkungen zur Rolle von Punkten und Geraden in affinen Räumen gemacht, aber formal nur den affinen Raum eines Vektorraumes behandelt. Anders formuliert, wir haben nicht wirklich gesagt, was ein affiner Raum ist, was seine Struktur ausmacht. Eine nachteilige Konsequenz hiervon ist, das Teilräume zunächst einmal nicht Objekte in der gleichen Klasse sind, sondern einfach Teilmengen mit gewissen Eigenschaften. Bei den bisher betrachteten algebraischen Strukturen war das anders: z.B. kann eine Untergruppe einer Gruppe in kanonischer Weise als Gruppe aufgefasst werden (durch Beschränkung der Verknüpfung), und dann ist alles, was man für Gruppen betrachtet oder definiert, automatisch auch auf Untergruppen anwendbar. Im Hinblick auf den nächsten Abschnitt, in dem wir „affine Abbildungen”, also die „strukturerhaltenden” Abbildungen zwischen affinen Räumen, einführen werden, geben wir jetzt noch eine wirkliche Definition von affinen Räumen an. Wie bisher wird zu jedem affinen Raum (definitionsgemäß) ein Vektorraum gehören (genau wie zu jedem Vektorraum nach Definition ein Körper gehört).

Definition 5.1.17 Gegeben sei ein Körper K und ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum V. Ein *affiner Raum mit Richtungsraum* V ist ein Tripel $(P, V, +)$, wobei P eine Menge ist und $+ : V \times P \to P, \quad (v, a) \mapsto v + a$ eine äußere Verknüpfung, die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $\mathbf{0} + a = a$ für alle $a \in P$,
2. $v + (w + a) = (v + w) + a$ für alle $v, w \in V,\ a \in P$,
3. Für alle $a, b \in P$ existiert genau ein $v \in V$ so, dass $v + a = b$.

Die Elemente aus P werden *Punkte* des affinen Raumes genannt, der Vektor v in 3. heißt auch *Verbindungsvektor* der Punkte a und b, Bezeichnung $v =: b - a$.

Für jeden Vektorraum V ist offenbar $(V, V, +)$ ein affiner Raum, wobei wir für $+$ die in V gegebene Addition von Vektoren nehmen. Dieses ist der bereits früher (und weiterhin) betrachtete Raum $\mathrm{AG}(V, K)$. Die verschiedenen Kennzeichnungen, wann eine Teilmenge $T \subseteq P$ ein Teilraum ist, übertragen sich sofort auf die neue Situation. Anders als früher können wir jetzt aber Folgendes feststellen: Für jeden Teilraum $T = a + U \subseteq P$, dabei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, ist $(T, U, +)$ mit der von $V \times P$ auf $U \times T$ eingeschränkten Verknüpfung selbst ein affiner Raum.

In etwas fortgeschrittener (algebraischer) Terminologie besagen die Bedingungen 1. und 2., dass die Verknüpfung $+$ eine sogenannte *Operation* oder *Aktion* der Gruppe $(V, +)$ auf der Menge P ist; die Bedingung 3. drückt aus, dass diese Operation *scharf transitiv* ist.

5.2 Affine Abbildungen: Allgemeines

Im zweiten Teil dieses Kapitels behandeln wir nun die zu affinen Räumen gehörigen „strukturerhaltenden“ Abbildungen.

Definition 5.2.1 Gegeben seien zwei affine Räume $\mathrm{AG}(V, K)$ und $\mathrm{AG}(W, K)$. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt *affin*, falls es eine lineare Abbildung $F : V \to W$ gibt mit

$$\varphi(y) - \varphi(x) = F(y - x) \text{ für alle } x, y \in V.$$

Die offenbar durch φ eindeutig festgelegte Abbildung F heißt auch die *Ableitung von* φ, Schreibweise $F =: \varphi'$.

In Worten bedeutet die Bedingung: Der Verbindungsvektor der Bildpunkte $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ ergibt sich durch eine lineare Transformation aus dem Verbindungsvektor der ursprünglichen Punkte x und y. Die Eindeutigkeit von F ergibt sich daraus, dass $F(v) = \varphi(a + v) - \varphi(a)$ sein muss, für alle $v \in V$, wobei $a \in V$ fest gewählt ist. Wenn man diese Überlegung etwas weiter führt, erhält man Teil a) des unten folgenden Satzes 5.2.4. Die obige Definition einer affinen Abbildung (und ihrer Ableitung) überträgt sich unmittelbar auf die allgemeineren affinen Räume aus der ergänzenden Definition 5.1.17:

Bemerkung 5.2.2 Gegeben seien zwei affine Räume P und Q mit Translationsraum V bzw. W. Eine Abbildung $\varphi : P \to Q$ heißt *affin*, falls es eine lineare Abbildung $F : V \to W$ gibt mit

$$\varphi(y) - \varphi(x) = F(y - x) \text{ für alle } x, y \in P.$$

Im Fall $P = V$, $Q = W$ ist jede lineare Abblildung F trivialerweise eine affine Abbildung, mit $F' = F$. Bevor wir die Struktur von affinen Abbildungen allgemein klären, schauen wir uns diejenigen affinen Abbildungen an, die zu den linearen Abbildungen „wesentlich” hinzukommen. Auch die folgende Definition und der zugehörige Satz passen perfekt für affine Räume im Sinne der ergänzenden Definition 5.1.17; wir formulieren sie trotzdem nur für Vektorräume.

Definition und Satz 5.2.3 Es sei V ein K-Vektorraum, den wir auch als affinen Raum $\mathrm{AG}(V, K)$ auffassen.

a) Eine *Translation* von V bzw. $\mathrm{AG}(V, K)$ ist eine Abbildung $\tau = \tau_v : V \to V$, $x \mapsto v + x$, wobei $v \in V$ ein fester Vektor ist.

b) Jede Translation ist eine affine Abbildung, nämlich mit Ableitung $\tau' = \mathrm{Id}_V$.

c) Jede Translation ist bijektiv; die Menge aller Translationen von V ist eine Gruppe bezüglich der Verkettung von Abbildungen, die *Translationsgruppe* $T(V) = \{\tau_v \mid v \in V\}$ von V.

d) Die Translationsgruppe von V ist isomorph zur additiven Gruppe von V. Ein Isomorphismus ist durch $v \mapsto \tau_v,\ V \to T(V)$ gegeben.

Beweis: Teil b) sieht man sofort. Für c) und d) stellt man als erstes durch unmittelbares Nachprüfen der Definition fest, dass für alle $v, w, x \in V$ gilt:

$$(\tau_v \circ \tau_w)(x) = \tau_v(\tau_w(x)) = \tau_v(w + x) = (v + (w + x) = (v + w) + x = \tau_{v+w}(x),$$

also $\tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w}$. Zusammen mit $\tau_{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}_V$ beweist das zunächst, dass Translationen bijektiv sind, wobei $(\tau_v)^{-1} = \tau_{-v}$ wieder eine Translation ist, weiter, dass die Menge aller Translationen eine Untergruppe der Gruppe aller bijektiven Selbstabbildungen von V ist, schließlich auch die in d) behauptete Isomorphie. □

Nun klären wir, wie beliebige affine Abbildungen aussehen. Im Ergebnis ist jede affine Abbildung eines Vektorraumes eine Verkettung einer linearen Abbildung mit einer Translation.

Satz 5.2.4 *Gegeben seien zwei affine Räume* $\mathrm{AG}(V, K)$ *und* $\mathrm{AG}(W, K)$.

a) Die affinen Abbildungen von V in W sind genau die Abbildungen

$$\varphi_{w,F} : V \to W,\ x \mapsto w + F(x),\ \textit{wobei } F \in \mathcal{L}(V, W),\ w \in W.$$

b) Die Komposition zweier affiner Abbildungen ist wieder affin. Dabei gilt für die Ableitungen $(\varphi \circ \psi)' = \varphi' \circ \psi'$. In der Darstellung aus a) gilt

$$\varphi_{w_1,F_1} \circ \varphi_{w_2,F_2} = \varphi_{w_1+F_1(w_2),F_1\circ F_2}.$$

c) Eine affine Abbildung φ ist genau dann injektiv bzw. surjektiv, wenn ihre Ableitung φ' es ist.

d) Wenn eine affine Abbildung φ bijektiv ist, dann ist auch φ^{-1} affin, und $(\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1}$.

Beweis: Die Aussage b) überprüft man unmittelbar anhand der Definitionen, ebenso die angegebene Formel. Die Aussage c) beweist man zweckmäßigerweise mittels der Darstellung $\varphi_{w,F}$ aus a): Es ist $\varphi_{w,F} = \tau_w \circ F$, wobei der eine „Faktor“ τ_w bijektiv ist. Ganz allgemein gilt aber für beliebige Abbildungen $g : X \to Y,\ h : Y \to Z$ mit bijektivem $h : Y \to Z$, dass $f := h \circ g$ genau dann injektiv bzw. surjektiv ist, wenn g es ist.

Zum Beweis von d) macht man für die Inverse von $\varphi_{w,F} : V \to W$ mit gemäß c) bijektivem F einen Ansatz $\varphi_{w,F} \circ \varphi_{v,K} = \mathrm{Id}_W$ und löst diesen mit $K := F^{-1}$, $v := -F^{-1}(w)$. □

Korollar 5.2.5 Zu zwei gegebenen Punkten $a_0 \in V$ und $b_0 \in W$ und einer linearen Abbildung $F : V \to W$ gibt es genau eine affine Abbildung $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(a_0) = b_0$ und $\varphi' = F$.

Beweis: Man nehme $\varphi = \varphi_{w,F}$ mit $w = b_0 - F(a_0)$. Offenbar ist dieses auch die einzige Möglichkeit, die Bedingungen an φ zu erfüllen. □

Korollar und Definition 5.2.6 Die Menge aller bijektiven affinen Abbildungen von V auf sich bildet mit der Abbildungsverkettung als Verknüpfung eine Gruppe. Sie heißt die *affine Gruppe* von V und wird mit $\mathrm{AGL}(V)$ bezeichnet; ihre Elemente heißen *Affinitäten.* Es gilt also:

$$\mathrm{AGL}(V) := \{\varphi_{v,F} \mid v \in V,\ F \in \mathrm{GL}(V)\}\,.$$

Korollar 5.2.7 Die Abbildung $\mathrm{AGL}(V) \to \mathrm{GL}(V),\ \varphi \mapsto \varphi'$ bzw. $\varphi_{v,F} \mapsto F$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.

Es folgt noch ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für affine Abbildungen, der den entsprechenden Satz der Linearen Algebra I von Vektorräumen auf affine Räume überträgt.

Satz 5.2.8 *Es seien* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *eine affine Basis von* $\mathrm{AG}(V, K)$ *und* $c_0, \ldots, c_n$ *Punkte von* $\mathrm{AG}(W, K)$*. Dann gibt es genau eine affine Abbildung* $\varphi : V \to W$ *mit* $\varphi(a_i) = c_i$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n$*. In baryzentrischen Koordinaten bzgl.* $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ *gilt*

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{n} \beta_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i c_i\,.$$

Beweis: Nach Bemerkung 5.1.16 ist $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ eine Vektorraumbasis von V. Auf diese und die Vektoren $c_1 - c_0, \ldots, c_n - c_0$ wenden wir Satz 2.7.4 an und erhalten so eine eindeutige lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(a_i - a_0) = c_i - c_0$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir setzen das gesuchte φ in der Form $\varphi_{w,F}$ mit diesem F an. Den Vektor w muss man dann so wählen, dass $w + F(a_0) = \varphi_{w,F}(a_0) = c_0$ ist, d.h. wir setzen $w := c_0 - F(a_0)$. Das so definierte φ erfüllt alle Bedingungen. Aus der Diskussion geht auch die Eindeutigkeit hervor, beachte dabei die Eindeutigkeit der Ableitung φ' einer affinen Abbildung. □

Die im letzten Satz angegebene Formel gilt sinngemäß für jede affine Linearkombination; wir halten das als eigene Aussage fest:

Bemerkung 5.2.9 Affine Abbildungen sind mit affinen Linearkombinationen verträglich: Wenn $\varphi : V \to W$ affin ist, $a_0, \ldots, a_m \in V$ und $\beta_0, \ldots, \beta_m \in K$ mit $\sum_{i=0}^{m} \beta_i = 1$, dann ist

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{m} \beta_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \varphi(a_i)\,.$$

Wir schließen nun wieder direkt an Satz 5.2.8 an. Wie bei linearen Abbildungen kann man die grundlegenden Eigenschaften von φ an den Eigenschaften der Bildpunkte c_i ablesen:

Satz 5.2.10 *Unter den Voraussetzungen von 5.2.8 gilt:*

a) φ *ist injektiv genau dann, wenn das Tupel* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *affin unabhängig ist.*

b) φ *ist surjektiv genau dann, wenn* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *ein affines Erzeugendensystem ist, d.h.* $\mathrm{Aff}\,\{c_0, c_1, \ldots, c_n\} = W$.

c) φ *ist bijektiv genau dann, wenn* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ *eine affine Basis (Basis 1. Art) ist.*

Der Beweis wird in allen drei Fällen mittels der Darstellung der Punkte aus V durch affine Koordinaten bezüglich $a_0, \ldots, a_n$ geführt und ergibt sich dann leicht aus der Beschreibung von φ durch die Formel aus Satz 5.2.8.

Als nächstes stellen wir fest, dass sich affine Abbildungen bezüglich Teilräumen wie erwartet verhalten.

Satz 5.2.11 *Es sei* $\varphi : \mathrm{AG}(V, K) \to \mathrm{AG}(W, K)$ *eine affine Abbildung.*

a) Für jeden affinen Teilraum $A \subseteq V$ *ist das Bild* $\varphi(A)$ *ein affiner Teilraum von* W.

b) Für jeden affinen Teilraum $B \subseteq W$ *ist das Urbild* $\varphi^{-1}(B)$ *ein affiner Teilraum von* V.

Der Beweis geht am schnellsten, wenn man das Kriterium aus Satz 5.1.11 a) für Teilräume zusammen mit Bemerkung 5.2.9 benutzt (völlig analog zu Untervektorräumen und linearen Abbildungen).

Wir wenden uns schließlich den Fixpunkten von affinen Abbildungen zu. Ein Fixpunkt einer Abbildung $\varphi : M \to M$ einer beliebigen Menge M in sich selbst ist bekanntlich ein $x \in M$, für das $\varphi(x) = x$ gilt. Die Menge aller Fixpunkte von φ wird mit $\mathrm{Fix}\,\varphi$ bezeichnet. Eine lineare Abbildung hat immer mindestens einen Fixpunkt, nämlich den Nullpunkt. Die Menge aller Fixpunkte ist der Eigenraum zum Eigenwert 1, insbesondere also ein Untervektorraum. Analog ist die Fixpunktmenge einer affinen Abbildung ein affiner Teilraum. Das überlegt man sich direkt anhand der Definition eines Teilraums, oder auch mit dem Kriterium unter 5.1.11 a). Es folgt auch noch einmal aus dem folgenden Satz, Teil c), zusammen mit 5.2.11 b).

Satz 5.2.12 (Fixpunkte affiner Abbildungen)
Es sei $\varphi = \varphi_{v,F} : \mathrm{AG}(V, K) \to \mathrm{AG}(V, K)$ *eine affine Abbildung.*

a) φ *besitzt einen Fixpunkt genau dann, wenn* $v \in \mathrm{Bild}(F - \mathrm{Id}_V)$ *gilt.*

b) φ *besitzt einen eindeutigen Fixpunkt genau dann, wenn* 1 *kein Eigenwert von* F *ist.*

c) *Die Menge* $\operatorname{Fix}\varphi$ *der Fixpunkte von* φ *ist gleich dem Urbild* $(F - \mathrm{Id}_V)^{-1}(-v)$.

Beweis: Teil c) ergibt sich unmittelbar durch Umschreiben der Fixpunktgleichung $x = \varphi(x) = v + F(x)$. Aussage a) ist ein Spezialfall von c). Die Äquivalenz unter b) sieht man mit Standard-Schlüssen der Linearen Algebra: Wenn 1 kein Eigenwert von F ist, ist $F - \mathrm{Id}_V$ bijektiv, und es gibt nach Teil c) einen eindeutigen Fixpunkt. Wenn dagegen 1 Eigenwert ist, also $F - \mathrm{Id}_V$ weder surjektiv noch injektiv, dann gibt es je nach Translationsvektor v entweder gar keinen Fixpunkt, oder die Dimension der Fixpunktmenge ist ≥ 1. □

Wir besprechen schließlich noch die Darstellung von affinen Abbildungen $\varphi : V \to W$ durch Matrizen. Sei zunächst $V = K^n$, $W = K^m$. Dann ist die Ableitung φ' von der Form F_A für eine eindeutige $m \times n$-Matrix A, und $\varphi = \varphi_{\mathbf{b},F_A}$, wobei $\mathbf{b} = \varphi(\vec{0}) \in K^m$. Für diese Abbildung schreiben wir etwas kürzer $\varphi_{\mathbf{b},A}$, also $\varphi_{\mathbf{b},A}(\mathbf{x}) = \mathbf{b} + A\mathbf{x}$. Wir wollen nun diese Abbildung, also das Paar $(\mathbf{b}, A)$, in geeigneter Weise durch eine Matrix der Größe $(m+1) \times (n+1)$ darstellen. Hierzu betten wir den K^n als affine Hyperebene in den K^{n+1} ein, genauer betrachten wir die Abbildung

$$K^n \xrightarrow{\cong} \widetilde{K^n} \subset K^{n+1},\ \mathbf{x} \mapsto \widetilde{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

Die Menge $\widetilde{K^n}$ besteht also nach Definition aus allen Elementen des K^{n+1} mit erster Komponente 1; sie ist ein affiner Teilraum vom K^{n+1}. Die Komponenten von Elementen des K^{n+1} werden hier durch $0, 1, \ldots, n$ indiziert, dementsprechend sind die kanonischen Basisvektoren (Einheitsvektoren) des K^{n+1} in diesem Zusammenhang gleich $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Entweder durch Übertragung von K^n oder direkt nach Bemerkung 5.2.2 ist definiert, was affine Abbildungen von $\widetilde{K^n}$ in $\widetilde{K^m}$ sind: Es sind genau die Abbildungen $\widetilde{\mathbf{x}} \mapsto (\mathbf{w} + A\mathbf{x})^{\sim}$ mit fester Matrix und festem Vektor $\mathbf{w} \in K^m$.

Lemma 5.2.13 Mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt Folgendes:

a) Die linearen Abbildungen von K^{n+1} in K^{m+1}, die den affinen Unterraum $\widetilde{K^n}$ in den $\widetilde{K^m}$ abbilden, sind genau diejenigen, deren darstellende Matrix die Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{w} & A \end{pmatrix}$ mit $\mathbf{w} \in K^m$ und $A \in K^{m \times n}$ hat.

b) Jede affine Abbildung von $\widetilde{K^n}$ in $\widetilde{K^m}$ wird von einer linearen Abbildung von K^{n+1} in K^{m+1} induziert.

Beweis: Nach der Vorbemerkung über die Gestalt der affinen Abbildungen $\widetilde{K^n} \to \widetilde{K^m}$ folgt b) unmittelbar aus a). Zum Beweis von a) sei also $F : K^{n+1} \to K^{m+1}$ gegeben mit $F(\widetilde{K^n}) \subseteq \widetilde{K^m}$. Dann ist insbesondere $F(\mathbf{e}_0)$ von der Form $\widetilde{\mathbf{w}}$, was die erste Spalte der in Frage stehenden Matrix liefert. Ferner werden Differenzen von Vektoren aus $\widetilde{K^n}$ auf Differenzen von Vektoren in $\widetilde{K^m}$ abgebildet, d.h.

$F(\{\mathbf{0}\} \times K^n) \subseteq \{\mathbf{0}\} \times K^m$. Das liefert die Nullen in der ersten Zeile der Darstellungsmatrix. Dass umgekehrt jede solche Matrix den $\widetilde{K^n}$ in den $\widetilde{K^m}$ abbildet, ist ebenso klar. □

Im nächsten Satz heben wir den Fall der Automorphismen, insbesondere $n = m$, des letzten Lemmas besonders hervor. Es ergibt sich eine Beschreibung der Automorphismengruppe eines affinen Raumes (siehe 5.2.6) als Matrizengruppe.

Definition und Satz 5.2.14 (Matrixdarstellung von Affinitäten)
Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

a) Die Menge von Matrizen

$$\mathrm{AGL}_n(K) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \mathbf{v} & A \end{pmatrix} \mid \mathbf{v} \in K^n,\ A \in \mathrm{GL}_n(K) \right\} \subset \mathrm{GL}_{n+1}(K)$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$.

b) $\mathrm{AGL}_n(K)$ ist durch die Operation auf der Hyperebene $\widetilde{K^n}$ im K^{n+1} kanonisch isomorph zur Gruppe $\mathrm{AGL}(K^n)$ der Affinitäten des K^n.

Man kann noch bemerken, dass sich bei Multiplikation von zwei Matrizen aus $\mathrm{AGL}_n(K)$ genau die Verkettungsformel aus 5.2.4 b) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \mathbf{v} & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \mathbf{w} & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \mathbf{v} + A\mathbf{w} & AB \end{pmatrix}.$$

Wir kommen schließlich zur Matrixdarstellung von affinen Abbildungen von $\mathrm{AG}(V)$ in $\mathrm{AG}(W)$ für beliebige Vektorräume V und W an Stelle von K^n und K^m. Wie im Falle von linearen Abbildungen muss man hierfür zunächst Basen wählen, und zwar eine Basis 2. Art $\mathcal{A} = (a_0; v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathrm{AG}(V)$ und eine Basis 2. Art $\mathcal{B} = (b_0; w_1, \ldots, w_m)$ von $\mathrm{AG}(W)$. Analog zur Situation von Vektorräumen (Lineare Algebra, Kapitel 2.7) bezeichnen wir die bijektive affine Abbildung

$$\Phi_{\mathcal{A}} : K^n \to V,\ \mathbf{x} \mapsto a_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$$

als den zu $\mathcal{A}$ gehörigen *Basisisomorphismus*.

Bemerkung und Definition 5.2.15 Mit den eben eingeführten Bezeichnungen gilt folgendes: Für jede affine Abbildung $\varphi = \varphi_{w,F} : V \to W$ gibt es eine eindeutige Matrix $A \in K^{m \times n}$ und einen eindeutigen Spaltenvektor $\mathbf{z} \in K^m$ derart, dass das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi_{w,F}"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\varphi_{\mathbf{z},A}"] & K^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}.$$

Dabei ist A die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung F bezüglich der Vektorraumbasen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_m)$, und $\mathbf{z}$ ist die Koordinatenspalte bezüglich $\mathcal{B}$ des Vektors $w + F(a_0) - b_0$. Das Paar $(\mathbf{z}, A)$ heißt auch die *Koordinatendarstellung* von φ bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ \mathbf{z} & A \end{pmatrix} \in K^{(m+1)\times(n+1)}$$

ist die *Darstellungsmatrix* von φ bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Der Beweis ergibt sich durch unmittelbares Nachrechnen unter Benutzung des entsprechenden Diagramms für F und F_A, das die Darstellungsmatrix A definiert; $\mathbf{z}$ ist so gewählt, dass $\mathbf{0} \in K^n$ auf das richtige Element in W abgebildet wird, nämlich auf $w + F(a_0)$.

5.3 Exkurs: Die reelle Jordan-Normalform

Für die Herleitung der reellen Jordannormalform betrachtet man zunächst die übliche JNF und benutzt, dass über $\mathbb{C}$ das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Weiterhin wird verwendet, dass jedes reelle Polynom in Faktoren vom Grad ≤ 2 zerfällt.

Erinnerung: Mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ bezeichnen wir die Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $F : V \to W$ bezüglich der Basen $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ von V bzw. W.

Ist $\mathcal{B}$ ebenfalls eine Basis von V, so ist $(\alpha_{ij}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V)$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{B}$. Ihre Spalten sind die Koeffizienten, wenn man die alten Basisvektoren a_j durch die neuen b_i ausdrückt: $a_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$.
Weiter gilt $M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V)^{-1}$.

Definition und Satz 5.3.1 (Komplexe Erweiterung reeller Vektorräume)

a) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$, definiere $V_{\mathbb{C}} := \{x + iy \mid x, y \in V\}$ sowie

$$\begin{aligned} x + iy = x' + iy' &:\Leftrightarrow x = x' \text{ und } y = y' \\ (x + iy) + (x' + iy') &:= (x + x') + i(y + y') \\ (\alpha + i\beta)(x + iy) &:= (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x) \end{aligned}$$

für alle $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}), x + iy, x' + iy' \in V_{\mathbb{C}}$.

Hierdurch wird $V_{\mathbb{C}}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{C}$.

b) Die Abbildung $V \hookrightarrow V_{\mathbb{C}}, x \mapsto x + i \cdot 0 =: x$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Injektion; wir fassen somit V als Teilmenge von $V_{\mathbb{C}}$ auf.

c) Definieren wir $\sigma : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}, z = x+iy \mapsto \overline{z} := x-iy$, so ist σ ein $\mathbb{R}$-linearer Automorphismus von $V_{\mathbb{C}}$ mit $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{V_{\mathbb{C}}}$ und $\mathrm{Fix}(\sigma) = V$.

d) Jede $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von V ist auch $\mathbb{C}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$. Weiter ist $\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $V_{\mathbb{C}}$.

e) (Die universelle Eigenschaft) Zu jeder $\mathbb{R}$-linearen Abbildung $F : V \to Z$, dabei Z ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, gibt es eine eindeutige $\mathbb{C}$-lineare Fortsetzung

$$F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to Z \text{ mit } F_{\mathbb{C}}|_V = F.$$

f) Zu jeder linearen Abbildung $F : V \to W$ zwischen $\mathbb{R}$-Vektorräumen gibt es eine eindeutige komplexe Erweiterung

$$F_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \to W_{\mathbb{C}} \text{ mit } F_{\mathbb{C}}|_V = F.$$

g) *Die komplexe Erweiterung ist mit komplexer Konjugation verträglich:*

$$F_{\mathbb{C}}(\overline{z}) = \overline{F_{\mathbb{C}}(z)} \text{ für alle } z \in V_{\mathbb{C}}.$$

Beweis: a), b), c) durch Nachrechnen; formal ist $V_{\mathbb{C}} = V \times V$, wie bei der Konstruktion von $\mathbb{C}$ aus $\mathbb{R}$.
zu d): (i) Lineare Unabhängigkeit

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n} \gamma_j b_j = 0,\ \gamma_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C} \\ \Rightarrow\ & \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + i\beta_j) b_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j + i \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j = 0 \\ \Rightarrow\ & \forall j : \alpha_j = \beta_j = 0 \\ \Rightarrow\ & \forall j : \gamma_j = 0 \end{aligned}$$

(ii) Dass $\mathcal{B}$ ein $\mathbb{C}$-Erzeugendensystem von $V_{\mathbb{C}}$ ist, ist ebenso klar.
zu e): Wir müssen definieren:

$$F_{\mathbb{C}}(x + iy) := F(x) + iF(y).$$

Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-linear, wie man z.B. an der direkten Summenzerlegung (über $\mathbb{R}$) $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ sieht. (Dies beweist erneut auch d) (i))
Man rechnet $F_{\mathbb{C}}(iz) = iF_{\mathbb{C}}(z)$ direkt nach.
zu f): Wende e) auf die Hintereinanderschaltung

$$V \xrightarrow{F} W \hookrightarrow W_{\mathbb{C}} \text{ an.}$$

zu g): Es gilt

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{C}}(\overline{x + iy}) &= F_{\mathbb{C}}(x - iy) \\ &= F(x) - iF(y) \\ &= \overline{F_{\mathbb{C}}(x + iy)} \end{aligned}$$

□

Satz 5.3.2 *Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\dim V = 2m$ gerade.*

a) *Es sei $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_{2m})$ eine Basis von V, also auch von $V_{\mathbb{C}}$. Dann ist auch $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{A})$, gegeben durch*

$$b_j := \frac{ia_j + a_{j+m}}{\sqrt{2}},\ \overline{b_j},\ j = 1, \ldots, m$$

eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$.

Wenn umgekehrt $\mathcal{B}$ eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ der Form $b_j, \overline{b_j},\ j = 1, \ldots, m$ ist, dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B})$ mit

$$a_j := \frac{b_j - \overline{b_j}}{i\sqrt{2}},\ a_{j+m} := \frac{b_j + \overline{b_j}}{\sqrt{2}},\ j = 1, \ldots, m$$

eine "reelle" Basis von $V_{\mathbb{C}}$, d.h. $a_j = \overline{a_j}$ für alle $j = 1, \ldots, 2m$, also auch eine Basis von V.

Die Zuordnungen $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{A})$ und $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{B})$ sind invers zueinander.

b) Für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ wie in a) gilt für die Basiswechselmatrix

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iE_m & -iE_m \\ E_m & E_m \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -iE_m & E_m \\ iE_m & E_m \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind hermitesch:

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^{-1} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})^* = \overline{M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id})}^t.$$

Beweis: durch unmittelbares Nachrechnen bzw. Ablesen aus der Definition.

Lemma 5.3.3 Für eine Jordan-Matrix von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_m(\mu) & 0 \\ 0 & J_m(\overline{\mu}) \end{pmatrix},\ \mu = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$$

gilt

$$M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \begin{pmatrix} J_m(\mu) & 0 \\ 0 & J_m(\overline{\mu}) \end{pmatrix} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} J_m(\alpha) & -\beta E_m \\ \beta E_m & J_m(\alpha) \end{pmatrix} =: J_{2m}(\alpha, \beta).$$

Eine Matrix $J_{2m}(\alpha, \beta)$ heißt auch reelle Jordan-Matrix.

Beweis: wiederum durch einfaches Nachrechnen.

Die Bedeutung des Lemmas liegt darin, dass bei einer beliebigen reellen Matrix, aufgefasst als Matrix über $\mathbb{C}$, bzw. bei der komplexen Erweiterung eines beliebigen reellen Endomorphismus, Jordan-Blöcke $J_m(\mu)$ und $J_m(\overline{\mu})$ für $\mu \notin \mathbb{R}$ immer gemeinsam auftreten. Wenn man diese Beobachtung präzisiert und weiter ausführt, erhält man den folgenden Satz.

reelle-jordan

Satz 5.3.4 (Reelle Jordan-Normalform) *Es sei V ein reeller Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Schreibe das charakteristische Polynom als*

$$p_F = \pm \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{l_i} \cdot \prod_{j=1}^{s} (X - \mu_j)^{m_j} (X - \overline{\mu}_j)^{m_j}$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R},\ \mu_j = \alpha_j + i\beta_j \in \mathbb{C},\ \beta_j > 0.$$

Dann besitzt V die folgende F-invariante Zerlegung:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{r} \mathrm{Hr}(F, \lambda_j) \oplus \bigoplus_{j=1}^{s} \mathrm{Hr}(F, \mu_j, \overline{\mu}_j)$$

wobei

$$\mathrm{Hr}(F, \mu_j, \overline{\mu_j}) := (\mathrm{Hr}(F_{\mathbb{C}}, \mu_j) \oplus \mathrm{Hr}(F_{\mathbb{C}}, \overline{\mu}_j)) \cap V.$$

Es ist $\dim \mathrm{Hr}(F, \mu_j, \overline{\mu}_j) = 2m_j$*, d.h. die Komplexifizierung dieses reellen (Unter-) Raumes kann mit* $\mathrm{Hr}(F_{\mathbb{C}}, \mu_j) \oplus \mathrm{Hr}(F_{\mathbb{C}}, \overline{\mu}_j)$ *identifiziert werden.*

Die Einschränkung $F\,|_{\mathrm{Hr}(F,\lambda_j)}$ besitzt bezüglich einer geeigneten Basis eine Jordan-Normalform aus Blöcken $J_*(\lambda_j)$, die Einschränkung $F\,|_{\mathrm{Hr}(F,\mu_j,\overline{\mu}_j)}$ eine reelle Jordan-Normalform aus Blöcken $J_*(\alpha_i, \beta_i)$.

Bis auf Reihenfolge der Eigenwerte und der Blöcke ist die so gebildete Darstellungsmatrix von F eindeutig bestimmt.

5.4 Klassifikation der affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$

Unter „Klassifikation” von mathematischen Objekten versteht man generell die explizite Einteilung dieser Objekte in geeignete Äquivalenzklassen. Für affine bzw. lineare Abbildungen eines Raumes in sich ist die hierfür benutzte Äquivalenzrelation die folgende:

Definition 5.4.1 a) Zwei affine Abbildungen eines affinen Raumes in sich, $\varphi_1 : V_1 \to V_1,\ \varphi_2 : V_2 \to V_2$ heißen *konjugiert*, genauer *affin konjugiert*, in Zeichen $\varphi_1 \sim \varphi_2$, falls eine Affinität, also ein Isomorphismus affiner Räume $\psi : V_1 \to V_2$ existiert mit $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 \circ \psi^{-1}$.

b) Zwei Endomorphismen F_1, F_2 von Vektorräumen V_1, V_2 heißen *konjugiert*, in Zeichen $F_1 \sim F_2$, falls ein Isomorphismus von Vektorräumen $L : V_1 \to V_2$ existiert mit $F_2 = L \circ F_1 \circ L^{-1}$.

Da jede lineare Abbildung auch eine affine Abbildung ist, haben wir nun die Konjugiertheit von linearen Abbildungen zwei Mal definiert. Deswegen ist es nötig, folgendes festzustellen:

Proposition 5.4.2 Zwei lineare Abbildungen sind genau dann konjugiert, wenn sie affin konjugiert sind.

Die eine Implikation ist trivial. Wir verschieben den Beweis der anderen Implikation für einen Moment, weil er einige der nächsten Überlegungen benötigt.

Die Konjugiertheit von linearen Abbildungen ist nichts wirklich Neues: Wenn $V_1 = V_2 = K^n$ ist, dann sind F_1 und F_2 von der Form $F_i = F_{A_i}$ für zwei Matrizen A_1, A_2, ebenso $L = F_S$ für eine reguläre Matrix S. Die Gleichung $F_2 = L \circ F_1 \circ L^{-1}$ ist dann äquivalent zur Matrixgleichung $A_2 = SA_1S^{-1}$. Mit anderen Worten, F_1 und F_2 sind genau dann konjugiert, wenn die darstellenden Matrizen A_1 und A_2 zueinander ähnlich sind. Da Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation ist, ist auch folgende, zu Beginn dieses Abschnittes angekündigte Feststellung keine Überraschung:

Proposition 5.4.3 Konjugiertheit von affinen oder linearen Abbildungen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweisskizze: Die drei Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie und Transitivität einer Äquivalenzrelation folgen daraus, dass die identische Abbildung ein Automorphismus ist, mit ψ auch die Umkehrabbildung ψ^{-1} ein Isomorphismus ist und schließlich die Verkettung von zwei Isomorphismen wieder ein Isomorphismus ist. Wenn man nur affine Abbildungen bzw. Endomorphismen eines festen Vektorraumes V betrachtet, kann man das Argument noch etwas anders sehen: Wie bei der Ähnlichkeit von Matrizen folgen die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation leicht daraus, dass die Elemente ψ, die die Konjugation „vermitteln”, einer Gruppe entstammen, nämlich der $\mathrm{AGL}(V)$ bzw. der $\mathrm{GL}(V)$. □

Die Idee der Konjugiertheit ist, dass φ_2 „im Wesentlichen” die gleiche Abbildung wie φ_1 ist, jedoch „anders angeschaut”. Wenn man in φ_2 einen Punkt x' einsetzt, den man in der Form $x' = \psi(x)$ schreibt, und wenn man das Bild $y' = \varphi_2(x')$ wiederum in der Form $y' = \psi(y)$ schreibt, dann ist $y = \varphi_1(x)$. Man beachte, dass der Übergang $x \mapsto x'$ bzw. $y \mapsto y'$ durch einen Isomorphismus vermittelt wird, d.h. die ungestrichenen und die gestrichenen Punkte korrespondieren eineindeutig und strukturerhaltend miteinander. φ_2 tut mit den gestrichenen Punkten das, was φ_1 mit den ungestrichenen tut. Etwas formaler aufgeschrieben sieht der eben festgestellte Zusammenhang wie folgt aus:

$$\varphi_2 : x' \mapsto (\varphi_1(x))' \text{ mit einem Isomorphismus } \psi : x \mapsto x'.$$

Besonders prägnant ist dieser Zusammenhang, wenn $V_1 = V_2 =: V$ und der Isomorphismus ψ die Translation τ_v um einen Vektor $v \in V$ ist. Dann ist $\psi^{-1} = \tau_{-v}$, und für die Konjugierte $\varphi_2 = \tau_v \circ \varphi_1 \circ \tau_{-v}$ gilt $\varphi_2(v + x) = v + \varphi_1(x)$. Das heißt, vom Punkt v aus gesehen ist φ_2 die gleiche Abbildung wie φ_1 vom Punkt 0 aus gesehen.

Der oben festgestellte Zusammenhang zwischen Konjugiertheit linearer Abbildungen und Ähnlichkeit von Matrizen ist nicht auf den Standardvektorraum K^n beschränkt:

Proposition 5.4.4 Es seien F und G Endomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen V bzw. W.

a) Wenn F und G konjugiert sind und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige Basen von V bzw. W, dann sind die Darstellungsmatrizen $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G)$ ähnlich.

b) Wenn F und G konjugiert sind, dann gibt es Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V, so dass die zugehörigen Darstellungsmatrizen sogar übereinstimmen: $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G)$.

c) Wenn für irgendwelche Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ von V bzw. W die Darstellungsmatrizen $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(G)$ ähnlich sind, dann sind F und G konjugiert.

Wir benötigen noch einige explizite Formeln zur Konjugation, die sich auf die Darstellung affiner Abbildungen in der Form $\varphi_{u,F}$ mit $u \in V,\ F \in \operatorname{End} V$ beziehen. Die konjugierende Abbildung sei $\psi = \varphi_{z,L}$ mit $z \in V_2,\ L : V_1 \to V_2$ ein Vektorraum-Isomorphismus. Wir betrachten die Spezialfälle $\varphi = \tau_u,\ \psi = L$, sowie umgekehrt $\varphi = F,\ \psi = \tau_z$ (hier ist $V_1 = V_2$) sowie allgemeiner $\psi = \tau_z$ (immer noch $V_1 = V_2$), φ beliebig.

Lemma 5.4.5 (Formeln zur Konjugation) Die Bezeichnungen seien wie eben eingeführt, insbesondere $\psi = \varphi_{z,L}$.

a) $L \circ \tau_u \circ L^{-1} = \tau_{L(u)}$.

a') Allgemeiner: $\psi \circ \tau_u \circ \psi^{-1} = \tau_{L(u)}$. Jedes Konjugierte einer Translation ist wieder eine Translation.

b) $\tau_z \circ F \circ \tau_{-z} = \varphi_{z-F(z),F}$

b') Allgemeiner: $\tau_z \circ \varphi_{u,F} \circ \tau_{-z} = \varphi_{u+z-F(z),F}$

Beweis durch unmittelbares Nachrechnen anhand der Definitionen; die allgemeinere Variante a') bzw. b') folgt aus a) bzw. b) ohne größere Rechnung unter Benutzung der Tatsache, dass je zwei Translationen vertauschbar sind: $\tau_z \circ \tau_u = \tau_u \circ \tau_z$. □

Wir kehren zurück zum Zusammenhang von Konjugiertheit für affine und für lineare Abbildungen.

Bemerkung 5.4.6 Konjugierte affine Abbildungen haben konjugierte Ableitungen.

Beweis: Aus $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 \circ \psi^{-1}$ folgt nach Satz 5.2.4 b) und d) für die Ableitungen die analoge Gleichung $\varphi_2' = \psi' \circ \varphi_1' \circ \psi'^{-1}$. □

Aus der letzten Bemerkung folgt nun unmittelbar der noch fehlende Beweis von Proposition 5.4.2: Da zwei lineare Abbildungen jeweils mit ihrer eigenen Ableitung übereinstimmen, folgt aus ihrer Konjugiertheit als affine Abbildungen auch die Konjugiertheit als lineare Abbildungen.

Wir kehren nun zu der Grundidee zurück, dass konjugierte Abbildungen die gleichen Eigenschaften haben und wenden dieses auf die Fixpunktmengen an. Hierzu benötigen wir noch eine allgemeine Definition.

Definition und Bemerkung 5.4.7 Zwei Teilmengen M_1 und M_2 von affinen Räumen V_1 bzw. V_2 heißen *äquivalent*, genauer *affin äquivalent*, wenn eine Affinität $\psi : V_1 \to V_2$ existiert so, dass $\psi(M_1) = M_2$. Die so definierte Relation zwischen Teilmengen von affinen Räumen (gleicher Dimension) ist eine Äquivalenzrelation.

Zwei Mengen sind also affin äquivalent, wenn sie die gleiche Gestalt im Sinne der affinen Geometrie haben, anders ausgedrückt, wenn sie, durch die „affine Brille angeschaut", gleich aussehen. Beispiel: zwei Dreiecke im affinen Raum sind immer affin äquivalent zueinander. Man vergleiche dieses mit dem allgemein bekannten (in dieser Vorlesung offiziell erst später behandelten) Begriff der „Kongruenz" von Teilmengen eines euklidischen Raumes.

Zurück zu dem angekündigten Satz über Fixpunktmengen. Er ist einfach, aber grundlegend für die Klassifikation.

Proposition 5.4.8 Konjugierte affine Abbildungen haben äquivalente Fixpunktmengen und äquivalente invariante Unterräume. Wenn wie oben $\varphi_2 = \psi \circ \varphi_1 \circ \psi^{-1}$ ist, so gilt genauer

$$\psi(\operatorname{Fix}\varphi_1) = \operatorname{Fix}\varphi_2$$

und für jeden affinen Teilraum $U \subseteq V$

$$U \text{ ist } \varphi_1\text{-invariant} \iff \psi(U) \text{ ist } \varphi_2\text{-invariant.}$$

Wir wollen noch eine wichtige Folgerung der letzten Proposition festhalten: wenn φ einen Fixpunkt besitzt und wir speziell $\psi = \tau_{-a}$ wählen, dann hat die konjugierte Abbildung $\tau_{-a} \circ \varphi \circ \tau_a$, den Fixpunkt $\tau_a(a) = 0$, ist also eine lineare Abbildung (nämlich gleich F, wenn $\varphi = \varphi_{u,F}$). Wir haben also gezeigt:

Korollar 5.4.9 Jede affine Abbildung mit Fixpunkt ist konjugiert zu einer linearen Abbildung.

Wenn wir zusätzlich noch Proposition 5.4.2 berücksichtigen, sehen wir, dass sich die Klassifikation (Bestimmung der Äquivalenzklassen bezüglich Konjugiertheit) von affinen Abbildungen völlig auf das entsprechende Problem für Endomorphismen zurückführen lässt.

Da die Fixpunktmenge einer affinen Abbildung ein affiner Teilraum ist, können wir ferner das folgende griffige Resultat benutzen.

Proposition 5.4.10 Zwei Teilräume eines affinen Raumes sind genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Beweisskizze: Man überlegt sich leicht, dass man ein System von affin unabhängigen Punkten immer zu einer Basis ergänzen kann. Dieses gilt insbesondere für eine Basis eines Teilraumes. Nun wendet man den Existenzsatz 5.2.8 für affine Abbildungen an. □

Als Vorbereitung für den Klassifikationssatz für affine Abbildungen im $\mathbb{R}^2$ halten wir zunächst die aus der Linearen Algebra bekannte Klassifikation der Endomorphismen eines zweidimensionalen reellen Vektorraumes explizit fest; es handelt sich um einen einfachen Spezialfall von Satz 5.3.4.

Lemma 5.4.11 (Klassifikation der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$)
Für jeden Endomorphismus eines zweidimensionalen reellen Vektorraumes trifft einer der folgenden drei Fälle zu. Konjugierte Endomorphismen gehören zum gleichen Fall. Zwei Endomorphismen, die zum gleichen Fall gehören, sind genau dann konjugiert, wenn die auftretenden Eigenwerte λ, ggf. μ übereinstimmen.

Fall (a) diagonalisierbar: $F \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

Fall (b) ein reeller Eigenwert, nicht diagonalisierbar: $F \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Fall (c) kein reeller Eigenwert: $F \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \; b \neq 0, \lambda = a + b\mathrm{i}.$

Im Fall (c) ist λ ein „komplexer Eigenwert" der angegebenen Matrix, nämlich aufgefasst als Matrix mit Einträgen in $\mathbb{C}$, bzw. eine komplexe Nulstelle des charakteristischen Polynoms von F.

Der folgende Satz gibt für den Grundkörper der reellen Zahlen eine vollständige Beschreibung der Äquivalenzklassen affiner Abbildungen in Dimension 2. Die dabei verwendete Notation $F \sim A, \; u \sim \vec{a}$ mit einer konkret spezifizierten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Spaltenvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ bedeutet folgendes: F ist konjugiert zum Endomorphismus $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, oder äquivalent, A ist die Darstellungsmatrix $\mathcal{B}$ von F bezüglich einer geeigneten Basis von V (siehe Proposition 5.4.4) und $\vec{a}$ ist der Koordinaten-Vektor von u bezüglich $\mathcal{B}$. Beide Bedingungen zusammengenommen kann man auch so formulieren: $\varphi = \varphi_{u,F}$ ist konjugiert zu $\varphi_{\vec{a},A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Satz 5.4.12 (Klassifikationssatz für affine Abbildungen des $\mathbb{R}^2$)
Für jede affine Abbildung eines zweidimensionalen reellen affinen Raumes in sich trifft genau einer der folgenden 10 *Fälle zu. Konjugierte Abbildungen gehören zum gleichen Fall. Zwei Abbildungen, die zum gleichen Fall gehören, sind genau dann konjugiert, wenn die auftretenden Eigenwerte λ, ggf. μ übereinstimmen.*

Fall (0) $\dim \mathrm{Fix}\, \varphi = 2$

(0) ***Identität***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; u \sim \vec{0}$

Fall (1) $\dim \mathrm{Fix}\, \varphi = 1$

(1a) ***Parallelstreckung***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \; u \sim \vec{0}$

(1b) ***Scherung***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; u \sim \vec{0}$

Fall (2) $\dim \operatorname{Fix} \varphi = 0$

(2a) ***Zentrische Streckung***: $F \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 1, \ u \sim \vec{0}$

(2b) ***Euler-Affinität***: $F \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 1 \neq \mu < \lambda, \ u \sim \vec{0}$

(2c) ***Streckscherung***: $F \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 1, \ u \sim \vec{0}$

(2d) ***affine Drehstreckung***: $F \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ b \neq 0, \lambda = a + b\mathrm{i}, \ u \sim \vec{0}$

Fall (3) $\operatorname{Fix} \varphi = \emptyset$

(3a) ***Translation***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ u \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3b) ***Schub-Parallelstreckung***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \neq 1, \ u \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3c) ***Schubscherung***: $F \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ u \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beweis: Nach all den Vorbereitungen ist der Beweis nicht mehr allzu schwierig. Im folgenden müssen wir immer darauf achten, dass die zur Unterscheidung benutzten Bedingungen nur von der Äquivalenzklasse, nicht von der Abbildung selbst abhängen. Nach Lemma 5.4.8 und 5.4.10 trifft dieses zunächst einmal für die erste Unterscheidung in 4 Fälle gemäß der Dimension der Fixpunktmenge zu. Nach Bemerkung 5.4.6 können wir zur weiteren Unterscheidung (innerhalb jedes der 4 Fälle) die Äquivalenzklasse der Ableitung (also von F, wenn $\varphi = \varphi_{u,F}$) benutzen; hierfür wiederum hängt der Fall (a), (b) oder (c) aus Lemma 5.4.11 und weiter der Eigenwert λ, ggf. auch μ nur von der Klasse von φ ab.

Als nächstes diskutieren wir, welche der Fälle (a), (b), (c) des Lemmas und welche Eigenwerte für gegebene Dimension der Fixpunktmenge tatsächlich vorkommen. Hier spielt nach dem früheren Satz 5.2.12 der Eigenwert 1 eine besondere Rolle: der Fall (2) (Fixpunkt existiert und ist eindeutig) tritt genau dann ein, wenn 1 kein Eigenwert von F ist. Lediglich aus geometrischen Gründen wird der diagonalisierbare Fall (a) des Lemmas noch in zwei Fälle (2a) und (2b) (nur ein Eigenwert, zwei verschiedene Eigenwerte) aufgeteilt. In den übrigen Fällen (0), (1) und (3) für die Fixpunktmenge ist ein Eigenwert gleich 1, womit zunächst einmal der Fall (c) des Lemmas vollständig herausfällt. Der Fall (0) ist ohnehin trivial (es gibt nur die identische Abbildung), im Fall (1),(a) muss der zweite Eigenwert $\neq 1$ sein, weil wir sonst wieder im Fall (0) wären. Im Fall (3) tauchen die Möglichkeiten (a) und (b) für F beide auf, und wir teilen wie bei (2) die

Möglichkeit (a) aus geometrischen Gründen in die zwei Fälle (3a) und (3b) auf (zwei gleiche, zwei verschiedene Eigenwerte).

Es bleibt noch zu diskutieren, wie der Translationsvektor u aussieht. In den Fällen (0), (1) und (2) ist nach Korollar 5.4.9 φ konjugiert zu einer linearen Abbildung, d.h. wir können $u = 0$ annehmen. Nach Proposition 5.4.2 wird weiter die Konjugation von zwei solchen affinen Abbildungen vollständig auf den linearen Fall, also auf Lemma 5.4.11 zurückgeführt.

Im Fall (3) ist $u \neq 0$, und auch für jede konjugierte Abbildung ist der Translationsvektor $\neq 0$.

Im Fall (3a) ist $F = \mathrm{id}_V$, also die Darstellungsmatrix bezüglich jeder Basis die Einheitsmatrix, ferner ist $u \neq 0$. Wir wenden nun Lemma 5.4.5 a) an; dazu müssen wir lediglich einen Isomorphismus $L : V \to \mathbb{R}^2$ finden, der $L(u) = \binom{1}{0}$ erfüllt. Solche Isomorphismen existieren (ergänze u zu einer Basis von V).

Im Fall (3b) wenden wir die Konjugation mit einer Translation $\tau_z,\ z \in V$ an, wie sie in 5.4.5 b') beschrieben wird. Der Vektor u wird um $(\mathrm{id} - F)(z)$, also um einen beliebigen Vektor aus $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - F)$ abgeändert. Wähle Eigenvektoren v und w von F zum Eigenwert 1 bzw. λ. Dann ist $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - F) = \mathbb{R}w$. Wir können also den Translationsvektor u um Vielfache von w abändern und damit erreichen, dass $u = \alpha v$ ist. Da $\alpha \neq 0$ ist, können wir den Basisvektor v durch αu ersetzen. Bezüglich der neuen Basis hat die Darstellungsmatrix von F immer noch die gleiche, angegebene Gestalt, und der Kooridinatenvektor von u ist der gewünschte Vektor $\binom{1}{0}$.

Im Fall (3c) gehen wir zunächst wie bei (3b) vor, wobei sich folgende Änderung ergibt: jetzt ist $\mathrm{Bild}(\mathrm{id} - F) = \mathbb{R}v$, deshalb erreichen wir zunächst $u = \beta w$ mit einem Skalar $\beta \neq 0$. Dann ersetzen wir beide Basisvektoren durch das β-fache: bezüglich der neuen Basis $\beta v, \beta w$ ändert sich die Darstellungsmatrix nicht, während der Vektor u der zweite Basisvektor wird, wie gewünscht. $\square$

5.5 Euklidische Räume und ihre Isometrien

[2] Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, d.h. V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Dann heißt jeder affine Raum (P, V) mit Translationsraum V ein *euklidischer (affiner) Raum*. Insbesondere ist $\mathrm{AG}(V) = (V, V)$ ein euklidischer affiner Raum. Im folgenden wird zur einfacheren Notation nur dieser Fall betrachtet. Wir definieren den Abstand zweier Punkte durch $d(a, b) := ||b - a||$. Das Objekt (V, d), $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ein metrischer Raum.

Definition und Bemerkung 5.5.1 Es seien zwei metrische Räume (V, d) und (W, d') gegeben. Eine Isometrie ist eine abstandserhaltende Abbildung $f : V \to W$, das heißt es gilt

$$\forall x, y \in V : d'(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Jede Isometrie ist injektiv.

Beweis: Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$, dann folgt $d(x, y) = d'(f(x), f(y)) = 0$. Dabei gilt die erste Gleichung, da f eine Isometrie ist und die zweite folgt aus der Tatsache, dass d' eine Metrik ist. Mit demselben Axiom für d folgt nun $x = y$.

Satz 5.5.2 *Es sei (V, d) ein metrischer Raum. Die Menge*

$$\mathrm{Iso}(V, d) := \{f \mid f : V \to V, f \text{ bijektive Isometrie}\}$$

ist bezüglich der Abbildungsverkettung eine Gruppe.

Theorem 5.5.3 *Sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer affiner Raum. Dann ist jede Isometrie $f : V \to V$ eine bijektive affine Abbildung. Insbesondere gilt*

$$\mathrm{Iso}(V) \subseteq \mathrm{AGL}(V).$$

Beweis: Wir setzen $v := f(0), \tau_v : x \mapsto v + x$. Weiter sei f' die durch $f = \tau_v \circ f'$ definierte Abbildung, also $f' : x \mapsto f(x) - v$, woraus $f'(0) = f(0) - f(0) = 0$ folgt. Wir zeigen nun in mehreren Etappen, dass f' linear und f damit als Komposition affiner Abbildungen (lineare Abbildung und Translation) eine ebensolche ist.

- f' ist eine Isometrie:

  Seien $x, y \in V$, dann gilt

  $$\begin{aligned} d(f'(x), f'(y)) &= d(f(x) - v, f(y) - v) \\ &= ||f(x) - v - (f(y) - v)|| \\ &= ||f(x) - f(y)|| \\ &= d(f(x), f(y)) \\ &= d(x, y), \end{aligned}$$

  wobei die letzte Gleichheit gilt, da f nach Voraussetzung eine Isometrie ist.

[2] Vorlesung von Timo Rosnau, unter Benutzung eines Proseminarvortrages von Heiko Röglin

- f' erhält das Skalarprodukt:

  Wir haben schon die Gleichungen

  $$||f'(x) - f'(y)|| = ||x - y|| \text{ und } ||f'(0)|| = ||0|| = 0.$$

  Damit folgt

  $$||f'(x)|| = ||f'(x) - f'(0)|| = ||x - 0|| = ||x||,$$

  f' erhält also die Norm $|| - ||$. Wir brauchen noch die Hilfsaussage

  $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\Big(||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2\Big),$$

  die man folgenderweise sieht:

  $$\frac{1}{2}\Big(||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2\Big) = \frac{1}{2}\Big(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x - y, x - y\rangle\Big)$$
  $$= \frac{1}{2}\Big(\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle - \langle x, x\rangle - \langle y, y\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle\Big) = \langle x, x\rangle.$$

  Damit kann man insgesamt

  $$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \frac{1}{2}\Big(||x||^2 + ||y||^2 - ||x - y||^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(||f'(x)||^2 + ||f'(y)||^2 - ||f'(x) - f'(y)||^2\Big)\\ &= \langle f'(x), f'(y)\rangle\end{aligned}$$

  schließen.

- f' ist linear:

  Sei $\mathcal{B} := (b_1, \ldots, b_n)$ eine ON-Basis von V, $b'_i := f'(b_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ sowie $\mathcal{B}' := (b'_1, \ldots, b'_n)$. Wegen

  $$\langle b'_i, b'_j\rangle = \langle f'(b_i), f'(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$$

  ist $\mathcal{B}'$ ein ON-System, als solches nach 2.9.15 linear unabhängig und daher ebenfalls eine ON-Basis. Für $x \in V$ finden wir also Linearkombinationen

  $$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i,\ x_i \in \mathbb{R} \text{ und } f'(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b'_j,\ \lambda_j \in \mathbb{R}.$$

  Wir berechnen nun die λ_j. Aus

  $$\langle f'(x), b'_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j b'_j, b'_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle b'_j, b'_i\rangle = \lambda_i$$

folgt

$$\lambda_i = \langle f'(x), f'(b_i)\rangle = \langle x, b_i\rangle.$$

Damit ist $f'(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, b_i\rangle b_i'$. Für jedes i ist die Abbildung $x \mapsto \langle x, b_i\rangle b_i'$ linear und daher auch f' als Summe linearer Abbildungen.

Da jede Isometrie injektiv ist, ist auch f' injektiv, und da V endlich-dimensional ist, ist f' (als lineare Abbildung) sogar bijektiv, und damit auch f bijektiv.

Korollar 5.5.4 Sei $f : V \to V$ eine Isometrie. Es gibt $v \in V$ und $F \in O(V)$ so, dass $f = \varphi_{v,F}$ gilt. Jede Isometrie ist also eine bijektive affine Abbildung mit orthogonaler Ableitung.

Bemerkung: Die Umkehrung gilt ebenfalls (leicht).

Ziel des folgenden Unterabschnittes ist es, alle Isometrien des $\mathbb{R}^2$ zu klassifizieren. Erstes Unterscheidungsmerkmal ist dabei die Einteilung in sogenannte orientierungserhaltende und orientierungsumkehrende Abbildungen. Diese Begriffsbildung erschließt sich zum Beispiel, wenn man Kreise mit einer Durchlaufrichtung sowie deren Bilder unter einer gegebenen Abbildung betrachtet.

Erinnerung 5.5.5 Orthogonale $2 \times 2-$Matrizen sind von der Form

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ oder } S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$\det R_\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$
$$\det S_\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$$

Definition 5.5.6 Für eine affine Abbildung $\varphi = \varphi_{w,F}$ mit $F = F_A$ setzen wir $\det\varphi := \det F := \det A$. Eine bijektive affine Abbildung φ heißt *orientierungserhaltend*, falls $\det\varphi = 1$ ist und orientierungsumkehrend, falls $\det\varphi = -1$ ist.

Bemerkung: Translationen sind orientierungserhaltend.
Beweis: $\det \mathrm{Id} = 1$.

<u>Drehungen:</u> R_α ist die Drehung um den Ursprung um den Winkel α. Als orthogonale Abbildung ist R_α eine Isometrie. Sei $R_{w,\alpha}$ die Drehung um den Punkt w um den Winkel α. Diese Abbildung ist ebenfalls eine Isometrie, wir zeigen dies durch Darstellung von $R_{w,\alpha}$ als affiner Abbildung $\varphi_{v,L}$ mit orthogonaler Ableitung L:

$$R_{w,\alpha} = \tau_w \circ R_\alpha \circ \tau_{-w}.$$

Geometrisch betrachtet wird also zuerst w in den Ursprung verschoben, dann eine Ursprungsdrehung ausgeführt und schließlich die Verschiebung rückgängig gemacht. Damit folgt

$$R_{w,\alpha} : x \mapsto w + R_\alpha(x - w) = (w - R_\alpha w) + R_\alpha x,$$

also $R_{w,\alpha} = \varphi_{v,L}$ mit $v = w - R_\alpha w$ und $L = R_\alpha$.

Der folgende Satz zeigt, dass alle orientierungserhaltenden Isometrien des $\mathbb{R}^2$ Translationen oder Drehungen sind.

Satz 5.5.7 *Sei $\varphi_{v,L}$ eine affine Abbildung mit* $\det L = 1$ *und* $L \neq \mathrm{Id}$ *($\varphi_{v,L}$ also keine Translation). Dann ist $\varphi_{v,L}$ eine Drehung um einen Punkt $w \in \mathbb{R}^2$.*

Beweis: Wir zeigen, dass $\varphi_{v,L}$ genau einen Fixpunkt hat. Es gibt ein $\alpha \in [0, 2\pi)$ so, dass R_α Darstellungsmatrix von L ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}\det(L - \mathrm{Id}) = \det(R_\alpha - E_2) &= \det\begin{pmatrix}\cos\alpha - 1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - 1\end{pmatrix} \\ &= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha + 1 + \sin^2\alpha = 2 - 2\cos\alpha \\ &= 2(1 - \cos\alpha) \neq 0,\end{aligned}$$

denn für $\cos\alpha = 1$ wäre $L = \mathrm{Id}$. Also ist $L - \mathrm{Id}$ bijektiv und $\varphi_{v,L}$ hat nach 1.2.10 einen eindeutigen Fixpunkt w, für den

$$w = \varphi_{v,L}(w) = v + L(w) \Leftrightarrow v = w - L(w)$$

gilt. Damit ist dann

$$\varphi_{v,L}(x) = w - L(w) + L(x) = w - R_\alpha w + R_\alpha x = R_{w,\alpha}(x),$$

$\varphi_{v,L}$ ist also die Drehung um w um den Winkel α.

Spiegelungen: S_α ist die Spiegelung an derjenigen Ursprungsgeraden, die mit der x_1-Achse den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließt. Sei S_g die Spiegelung an einer beliebigen Geraden g, die den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mit der x_1-Achse einschließt. Wir wollen nun eine Formel für S_g herleiten. Sei dazu $g = v + \mathbb{R}u,\ u, v \in \mathbb{R}^2$ und der Stützvektor v o.B.d.A. senkrecht zum Richtungsvektor u der Geraden gewählt. Mit demselben Ansatz wie bei den Drehungen, d.h. Verschiebung von g zu einer Ursprungsgeraden, Spiegelung an dieser und Rückverschiebung, erhalten wir

$$S_g = \tau_v \circ S_\alpha \circ \tau_{-v}$$

als Darstellung von S_g durch affine Abbildungen. Damit folgt

$$S_g(x) = v + S_\alpha(x - v) = v + S_\alpha x - \underbrace{S_\alpha v}_{=-v} = 2v + S_\alpha x = \varphi_{2v,S_\alpha}(x).$$

Schubspiegelungen: Eine Schubspiegelung $S_{b,g}$ ist eine Spiegelung an einer Geraden g gefolgt von einer Translation τ_b, wobei b und der Richtungsvektor der Geraden g parallel sind. Es ist dann also $S_{b,g} = \tau_b \circ S_g$ mit $b \parallel g$.

Der nächste Satz besagt nun, dass Spiegelungen und Schubspiegelungen die einzigen orientierungsumkehrenden Isometrien des $\mathbb{R}^2$ sind.

Satz 5.5.8 *Sei $\varphi_{v,L}$ eine affine Abbildung mit* $\det L = -1$. *Dann ist $\varphi_{v,L}$ entweder eine Spiegelung oder eine Schubspiegelung.*

Beweis: Die Abbildung L ist eine Spiegelung an einer Ursprungsgeraden g_0. Wir wählen einen normierten Richtungsvektor u von g_0, so dass $g_0 = \mathbb{R}u$ und $||u|| = 1$ ist. Ergänzen wir nun u durch einen Vektor w zu einer ON-Basis des $\mathbb{R}^2$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda u + \mu w$. Damit folgt

$$\varphi_{v,L} = \tau_v \circ L = \tau_{\lambda u + \mu w} \circ L = \tau_{\lambda u} \circ (\tau_{\mu w} \circ L).$$

Wegen $w \perp g_0$ ist $\tau_{\mu w} \circ L$ eine Spiegelung an einer zu g_0 parallelen Geraden. Für $\lambda = 0$ ist $\varphi_{v,L}$ also eine Spiegelung und für $\lambda \neq 0$ eine Schubspiegelung, da $\lambda u \parallel g_0 = \mathbb{R}u$, also $\tau_{\lambda u}$ eine Verschiebung entlang der Geraden g_0 ist.

Auch für Isometrien gibt es den Begriff der Konjugiertheit: Zwei Elemente $f_1, f_2 \in \mathrm{Iso}(V, d)$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $g \in \mathrm{Iso}(V, d)$ gibt mit $f_2 = g \circ f_1 \circ g^{-1}$. Man sieht leicht (mittels Fixpunkten und Orientierung), dass zwei bijektive Isometrien nur dann konjugiert sein können, wenn sie zu demselben der fünf Typen (Identität, Translation, Drehung, Spiegelung, Schubspiegelung) gehören. Der folgende Satz gibt nun an, wann zwei Abbildungen desselben Typs konjugiert sind.

Satz 5.5.9 (Klassifikation der Bewegungen der Ebene) [3]

1. *Je zwei Translationen τ_v und τ_w sind genau dann konjugiert, wenn $||v|| = ||w||$ gilt.*
2. *Zwei Drehungen φ_{v,R_α} und φ_{w,R_β}, dabei o.B.d.A. $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ sind genau dann konjugiert, wenn $\alpha = \beta$ oder $\alpha + \beta = 2\pi$ gilt.*
3. *Je zwei Spiegelungen sind konjugiert.*
4. *Zwei Schubspiegelungen $S_{v,g}$ und $S_{w,h}$ sind genau dann konjugiert, wenn $||v|| = ||w||$ gilt.*

[3] Korrektur Oktober 2011

Die Aussage 2. kann auch wie folgt formuliert werden: alle Drehungen mit gleichem Drehwinkel sind zueinander konjugiert, gleichgültig, was der Drehpunkt ist. Ferner ist jede Drehung zu ihrer Inversen konjugiert (mit "negativem" Drehwinkel). Wenn man eine sogenannte "orientierte" euklidische Ebene betrachtet, wird man als konjugierende Abbildung g nur eine orientierungserhaltende Abbildung zulassen. Dann sind eine Drehung und ihre Inverse nicht mehr zueinander konjugiert, außer für den Drehwinkel π. Mit anderen Worten, man kann in der orientierten Ebene eine "Linksdrehung" von einer "Rechtsdrehung" unterscheiden, wie es zu erwarten ist.

Korollar 5.5.10 Ein Repräsentantensystem aller bijektiven Isometrien der reellen Ebene bezüglich der Äquivalenzrelation der Konjugiertheit ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\left\{\varphi_{v,A} \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, r \in [0,\infty)\right\} \\
\cup &\left\{\varphi_{v,A} \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in (0,\pi]\right\} \\
\cup &\left\{\varphi_{v,A} \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, r \in [0,\infty)\right\}.
\end{aligned}$$