Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Sommersemester 2017/2018

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

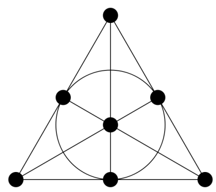
Blatt 13
Abgabe bis Mittwoch, 18. April

30. Es sei $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen ($q = p^r$, p prim). Zeigen Sie:

(a) Jede Gerade in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ enthält genau $q+1$ Punkte.

(b) Die projektive Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_q}$ hat q^2+q+1 Punkte und genauso viele Geraden.

(c) Interpretieren Sie den Graph im Bild als Darstellung der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_2}$. (Auch die Kreislinie ist eine Gerade). Diese projektive Ebene mit sieben Punkten und Geraden wird *Fano-Ebene* genannt.



31. Es seien $p_1, \ldots, p_4$ vier verschiedene Punkte in $\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 \cup \{\infty\}$. Nach Kor. 10.3 aus der Vorlesung gibt es genau eine Projektivität $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ mit

$$\varphi(p_2) = 1,\ \varphi(p_3) = 0,\ \varphi(p_4) = \infty.$$

Die Zahl $[p_1, p_2; p_3, p_4] = \varphi(p_1) \in K \setminus \{0, 1\}$ heißt das *Doppelverhältnis* des geordneten Viertupels (p_1, p_2, p_3, p_4). Zeigen Sie:

(a) Seien $(p_1, \ldots, p_4)$, $(q_1, \ldots, q_4)$ zwei Viertupel von Punkten in $\mathbb{P}^1$. Genau dann gibt es eine Projektivität Ψ auf $\mathbb{P}^1$ mit $\Psi(p_i) = q_i$ (für $i = 1, \ldots, 4$), wenn $[p_1, p_2; p_3, p_4] = [q_1, q_2; q_3, q_4]$ gilt. Insbesondere erhalten Projektivitäten das Doppelverhältnis.

(b) Es gilt

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_3} : \frac{p_1 - p_4}{p_2 - p_4}.$$

(c) In homogenen Koordinaten berechnet sich das Doppelverhältnis folgendermaßen. Es sei $p_i = [x_i, y_i]$, $i = 1, \ldots, 4$. Dann gilt

$$[p_1, p_2; p_3, p_4] = \frac{x_1y_3 - x_3y_1}{x_2y_3 - x_3y_2} : \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_2y_4 - x_4y_2}.$$

32. Es sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Ein Viertupel (p_1, p_2, p_3, p_4) in $\mathbb{P}^1_K$ von Punkten heißt *harmonisch*, wenn $[p_1, p_2; p_3, p_4] = -1$ gilt. Zeigen Sie: Genau dann ist $(p_1, \ldots, p_4)$ harmonisch, wenn es eine Projektivität gibt, die p_1 und p_2 vertauscht und p_3 und p_4 fixiert.