Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Sommersemester 2017/2018

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 16

Abgabe bis Dienstag, 8. Mai, 12:00 Uhr in Briefkasten 11

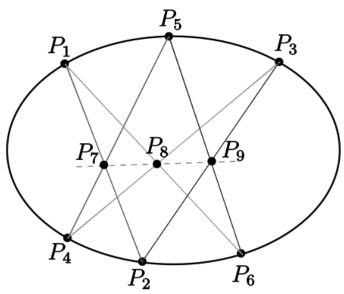
37. Es sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $X \subset \mathbb{P}^n$ ihr projektiver Abschluss. Für $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\deg(f) = d$ bezeichne $\mathrm{LF}(f) = f_d$ den homogenen Teil vom höchsten Grad, die *Leitform* von f. Zeigen Sie:

$$\mathcal{I}_+(V_\infty) = \langle \mathrm{LF}(f) \colon f \in \mathcal{I}(V) \rangle.$$

38. *Satz von Pascal über das Hexagrammum Mysticum.*
Es sei C ein irreduzibler Kegelschnitt in $\mathbb{P}^2$ und seien $p_1, \ldots, p_6$ sechs verschiedene Punkte auf C. Dann liegen die drei Schnittpunkte

$$\begin{aligned} p_7 &= L_1 \cap L_4 \text{ mit } L_1 = \overline{p_1 p_2} \text{ und } L_4 = \overline{p_4 p_5}, \\ p_8 &= L_2 \cap L_5 \text{ mit } L_2 = \overline{p_6 p_1} \text{ und } L_5 = \overline{p_3 p_4}, \\ p_9 &= L_3 \cap L_6 \text{ mit } L_3 = \overline{p_2 p_3} \text{ und } L_6 = \overline{p_5 p_6} \end{aligned}$$

von Verbindungsgeraden auf einer Geraden.



Bildquelle: Wikimedia Commons (Ag2gaeh)

Beweisen Sie den Satz nach folgender Skizze: Sei $f \in K[x_0, x_1, x_2]_2$ mit $C = \mathcal{V}_+(f)$. Betrachte die Kubiken

$$X_1 = L_1 \cup L_5 \cup L_6 \qquad \text{und} \qquad X_2 = L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

und seien $g_1, g_2 \in K[x_0, x_1, x_2]_3$ mit $X_1 = \mathcal{V}_+(g_1)$, $X_2 = \mathcal{V}_+(g_2)$. Sei $p \in C$, $p \notin \{p_1, \ldots, p_6\}$ und setze

$$g = g_2(p) g_1 - g_1(p) g_2.$$

Zeigen Sie, dass $g \neq 0$, aber $g(p) = g(p_1) = \cdots = g(p_6) = 0$. Schließen Sie mit Hilfe des Satzes von Bézout, dass f ein Teiler von g sein muss und folgern Sie daraus die Aussage des Satzes.