Prof. Dr. Daniel Plaumann
M. Sc. Dimitri Manevich
Sommersemester 2017/2018

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE I

Blatt 21

Abgabe bis Dienstag, 12. Juni, 12:00 Uhr in Briefkasten 11

47. Es sei X eine Menge von m Punkten in $\mathbb{P}^n$ und sei H_X die Hilbert-Funktion von X. Zeigen Sie: Für alle $d \geqslant m-1$ gilt $H_X(d) = m$.

48. Ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[z]$ heißt *numerisch*, wenn es $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Polynome

$$F_m(z) = \binom{z}{m} = \frac{1}{m!} z(z-1)\cdots(z-m+1)$$

für $m \geqslant 1$ sind numerisch und $1 = F_0, F_1, \ldots, F_d$ bilden eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}[z]_{\leqslant d}$.

(b) Ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[z]$ erfüllt $f(n) \in \mathbb{Z}$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn es eine $\mathbb{Z}$-Linearkombination der F_i ist. Jedes solche Polynom ist numerisch. (*Vorschlag:* Drücken Sie f durch die Basis-Polynome aus und betrachten Sie die Differenz $f(n+1) - f(n)$ für hinreichend großes n.)

(c) Sei f ein numerisches Polynom vom Grad d. Dann ist der Leitkoeffizient von f multipliziert mit $d!$ ganzzahlig und der konstante Term von f ist ganzzahlig.