Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 6

Abgabe am Donnerstag, dem 8. Juni, in der Vorlesung

In den folgenden Aufgaben sei stets R ein kommutativer Ring (mit Eins), M ein R-Modul und $N, P \subset M$ zwei Untermoduln.

21. Verifizieren Sie Lemma 5.1: Ist $T \subset M$ eine Teilmenge, dann ist

$$\left\{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \,\middle|\, a_1, \ldots, a_n \in R, x_1, \ldots, x_n \in T, n \in \mathbb{N}_0\right\}$$

der Durchschnitt aller Untermoduln von M, die T enthalten.

22. Zeigen Sie: Genau dann ist die Abbildung

$$\sigma \colon \begin{cases} N \times P & \to & M \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{cases}$$

ein Isomorphismus, wenn $N + P = M$ und $N \cap P = \{0\}$ gelten.
Wie lautet die richtige Entsprechung für endlich viele Untermoduln? Und wie für unendlich viele?

23. (a) Falls $P \subset N$, dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$(M/P)\big/(N/P) \cong M/N.$$

(b) Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$(N + P)/N \cong P/(N \cap P).$$

24. Setze

$$(N : P) = \{a \in R \,|\, aP \subset N\}.$$

Insbesondere heißt $\operatorname{Ann}(M) = (0 : M)$ der *Annulator von M*. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $(N : P)$ von R ist ein Ideal.

(b) Ist $I \subset R$ ein Ideal mit $I \subset \operatorname{Ann}(M)$, dann ist M in natürlicher Weise ein R/I-Modul. Der Annulator von M in $R/\operatorname{Ann}(\mathrm{M})$ ist das Nullideal.

(c) Es gilt $\operatorname{Ann}(N + P) = \operatorname{Ann}(N) \cap \operatorname{Ann}(P)$.

(d) Es gilt $(N : P) = \operatorname{Ann}\big((N + P)/N\big)$.