Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 7
Abgabe bis Freitag, den 16. Juni

In den folgenden Aufgaben sei stets R ein kommutativer Ring (mit Eins).

25. Sei M ein R-Modul mit Untermoduln N_1, N_2. Wenn M/N_1 und M/N_2 beide noethersch (bzw. artinsch) sind, dann ist auch $M/(N_1 \cap N_2)$ noethersch (bzw. artinsch).

26. Es sei M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) M ist noethersch.
(2) Jede nicht-leere Menge von endlich erzeugten Untermoduln von M besitzt ein maximales Element.
(3) Gegeben eine Folge $x_1, x_2, x_3, \cdots$ von Elementen in M, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass für jedes $k > n$ eine Darstellung

$$x_k = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad \text{mit} \quad a_1, \ldots, a_n \in R$$

existiert.

27. Betrachte die abelsche Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$. Für $x \in \mathbb{Q}$ schreibe $\overline{x} = x + \mathbb{Z}$. Fixiere eine Primzahl p und betrachte die Untergruppe

$$G = \left\{\overline{x} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \middle| \operatorname{ord}(\overline{x}) = p^r \text{ für ein } r \in \mathbb{N}_0\right\} = \left\{\overline{x} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \middle| x = \frac{a}{p^r} \text{ für } a \in \mathbb{Z} \text{ und } r \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ besitzt G genau eine Untergruppe G_n der Ordnung p^n, und dies sind alle echten Untergruppen von G.
(b) Die abelsche Gruppe G ist als $\mathbb{Z}$-Modul artinsch aber nicht noethersch.

28. Ein R-Modul P heißt *projektiv*, wenn jede exakte Sequenz

$$0 \to N \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} P \to 0$$

spaltet. Zeigen Sie:

(a) Jeder freie Modul ist projektiv.
(b) Ein endlich erzeugter Modul P ist genau dann projektiv, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und Untermoduln Q, Q' von R^n gibt mit $R^n = Q \oplus Q'$ und $Q' \cong P$.

Bemerkung: Es gibt projektive Moduln, die nicht frei sind. Über manchen Ringen ist aber jeder projektive Modul frei. Ein berühmter Satz von Quillen und Suslin (1976) sagt, dass jeder endlich erzeugte projektive Modul über einem Polynomring frei ist.