Prof. Dr. Daniel Plaumann
Sommersemester 2017

technische universität
dortmund

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA II

Blatt 9

Abgabe am Donnerstag, dem 29. Juni in der Vorlesung

33. (a) Es seien K_1, K_2, K_3 Körper und $R = K_1 \times K_2 \times K_3$. Bestimmen Sie die Idealstruktur von R und verifizieren Sie so, dass R artinsch und jedes Primideal maximal ist.

(b) Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$, $f \neq 0$. Zeigen Sie, dass der Faktorring $K[x]/\langle f \rangle$ artinsch ist.

34. (Struktursatz für Artinsche Ringe) Es sei R ein artinscher Ring und seien $M_1, \dots, M_k$ die maximalen Ideale von R. Zeigen Sie: Es gibt $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$R \cong \prod_{i=1}^{k} R/M_i^{n_i}.$$

Dies zeigt, dass jeder artinsche Ring ein endliches direktes Produkt von lokalen artinschen Ringen ist. (*Hinweise:* Zeigen Sie $M_i^{n_i} + M_j^{n_j} = R$ für $i \neq j$ und verwenden Sie den verallgemeinerten chinesischen Restsatz (Algebra I, Satz 2.6.16))

35. Beweisen Sie Prop. 8.1 aus der Vorlesung:

Sei R ein kommutativer Ring und $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge. Die Relation $\sim$ auf $R \times S$ gegeben durch

$$(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists t \in S\colon t(a_1 s_2 - a_2 s_1) = 0$$

ist eine Äquivalenzrelation. Wir schreiben $\frac{a}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (a, s) und R_S für die Menge aller Äquivalenzklassen. Mit den üblichen Rechenregeln

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \qquad \text{und} \qquad \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

wird R_S zu einem kommutativen Ring mit Eins $\frac{1}{1}$ und Null $\frac{0}{1}$.

36. Sei R ein kommutativer Ring, $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass es eine natürliche Isomorphie

$$R_S/I_S \cong (R/I)_{\overline{S}}$$

gibt (wobei $\overline{S}$ die Menge aller Restklassen von Elementen aus S in R/I bezeichnet).