Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

ÜBUNGEN ZUR ALGEBRA I (LEHRAMT)

Blatt 1
Abgabe am 24. Oktober bis 10:15 Uhr

1. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilringe des jeweils gegebenen Rings?

(a) $R_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid \text{es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } 3^n x \in \mathbb{Z}\}$;
(b) $R_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})\right\}$;
(c) $R_3 = \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \mid b \text{ ist gerade}\right\}$;
(d) $R_4 = \{c \in \mathbb{C} \mid c = a + bi \text{ mit } a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Z}\}$;

2. In einem Ring R gelte $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ für alle $a, b \in R$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $2a = 0$ für alle $a \in R$.
(b) R ist kommutativ.

3. (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Teilring von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Finden Sie einen Isomorphismus $R \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$.

4. Beweisen Sie, dass jeder endliche (kommutative) Integritätsring ein Körper ist. (*Hinweis*: Betrachten Sie die Menge aller Vielfachen eines Elements.)