Prof. Dr. Daniel Plaumann
Konstantinos Lentzos
Wintersemester 2016/17

technische universität
dortmund

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR ALGEBRA (BACHELOR)

Blatt 3

Abgabe am 7. November 2016 bis 10:15 Uhr

9. (a) Bestimmen Sie alle Ideale I von $\mathbb{Z}$ mit $20\mathbb{Z} \subset I \subset 2\mathbb{Z}$.
(b) Wieviele Primzahlen enthält jedes der in (a) gefundenen Ideale?

10. Es sei R ein kommutativer Ring und seien I und J Ideale in R.

(a) Zeigen Sie, dass das Idealprodukt IJ im Allgemeinen nicht nur aus den Produkten $\{ab : a \in I, b \in J\}$ besteht. Setzen Sie dazu $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$,

$$I = \langle x_1, x_2 \rangle \quad \text{und} \quad J = \langle x_3, x_4 \rangle$$

und zeigen Sie $IJ \neq \{ab \mid a \in I, b \in J\}$.
(b) Zeigen Sie: Falls $I + J = R$, so gilt $IJ = I \cap J$.

11. Betrachten Sie die Menge $R = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : f(0) \in \mathbb{Z}\}$ aller Polynome mit rationalen Koeffizienten und ganzzahligem konstanten Term. Zeigen Sie, dass R ein Teilring von $\mathbb{Q}[x]$ ist. Zeigen Sie, dass es in R unendliche Teilerketten gibt, das heißt, finden Sie eine Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Polynomen in R mit

$$f_{n+1} | f_n \quad \text{und} \quad f_{n+1} \nsim f_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Was folgt daraus für den Ring R?

12. Beweisen Sie, dass die Elemente $2 + 2\sqrt{-5}$ und 6 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ keinen größten gemeinsamen Teiler besitzen.
(*Hinweise:* Welche gemeinsamen Teiler haben die beiden Elemente? Verwenden Sie die Faktorisierung $6 = 2 \cdot 3 = (1 + 1\sqrt{-5})(1 - 1\sqrt{-5})$.)